

Câu 1:

$$\begin{aligned} 1) \quad M &= \sqrt{81} + 2\sqrt{9} - \sqrt{25} \\ &= 9 + 2 \cdot 3 - 5 \\ &= 9 + 6 - 5 \\ &= 15 - 5 = 10 \end{aligned}$$

$$2) \quad x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\text{Ta có: } a + b + c = 1 + (-7) + 6 = 0$$

nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = 6 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1; 6\}$

3)

$$\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - (4 - x) = 8 \\ 2y = 4 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4 + x = 8 \\ 2y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 12 \\ 2y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$

Câu 2:

$$a) \quad B = \frac{3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 10}{x - 4} \quad (x \geq 0; x \neq 4)$$

$$= \frac{3(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{\sqrt{x} + 10}{x - 4}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{\sqrt{x} + 10}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} + 6 - \sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{2(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{2}{\sqrt{x} + 2}$$

TITLE:

b) Ta có:

$$P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+2} = \frac{2}{\sqrt{x}-2} \quad (x \geq 0; x \neq 4)$$

$$\text{Đề' } P \leq -1 \text{ thì } \frac{2}{\sqrt{x}-2} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \leq 0$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0, x \neq 4 \text{ nên đề' } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \leq 0 \text{ thì}$$

$$\sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$$

$$\text{Mà } \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq x < 4 \end{cases} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3\}$$

$$\text{Vậy đề' } P \leq -1 \text{ thì } x \in \{0; 1; 2; 3\}$$

Câu 3:1) Gọi vận tốc xe máy là x (km/h) ($x > 0$)Vì vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 20 km/h nên vận tốc ô tô là $x + 20$ (km/h)Thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là $\frac{240}{x}$ (h)Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB là $\frac{240}{x+20}$ (h)

Do ô tô đến B sớm hơn xe máy 2 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+20} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{240(x+20) - 240x}{x(x+20)} = 2$$

$$\Leftrightarrow 240x + 4800 - 240x = 2x(x+20)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 40x = 4800$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 40x - 4800 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 20x - 2400 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \text{ (t/m)} \\ x = -60 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc xe máy là 40 km/h
vận tốc ô tô là 40 + 20 = 60 (km/h)

2) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$$x^2 = -2x + m$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - m = 0 \quad (1)$$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Rightarrow \Delta' = 1^2 - 1 \cdot (-m) = m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow m > -1$$

Với $m > -1$ thì (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1) và $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$

Áp dụng định lý Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$$

$$\text{Để } y_1 + y_2 + 3x_1 x_2 = 1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 3x_1 x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 = 1$$

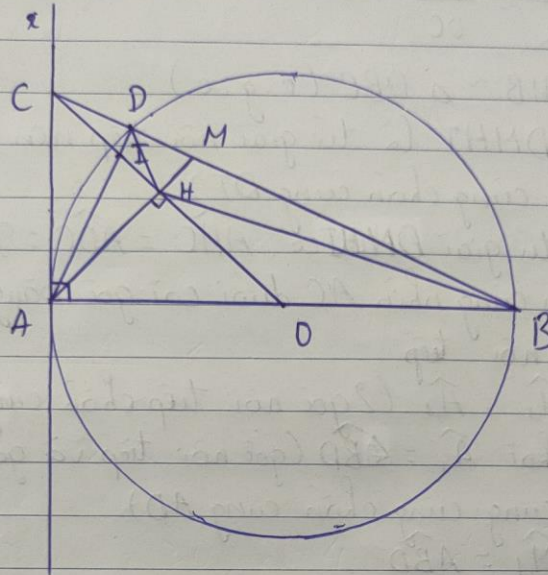
$$\Leftrightarrow (-2)^2 - m = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 - m = 1 \quad \Leftrightarrow m = 3 \text{ (t/m)}$$

LE:

Vậy $m = 3$

Câu 4:



a) Ta có: $\widehat{ADB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn đường tròn)
 $\Rightarrow \widehat{IDM} = 90^\circ$

$AH \perp OC$ tại $H \Rightarrow \widehat{IHM} = 90^\circ$

Xét tứ giác $DMHI$ có: $\widehat{IDM} + \widehat{IHM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
 $\Rightarrow DMHI$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180°)

b)

Ta có: $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (do Ax là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH ta có:

$$OH \cdot OC = OA^2 = R^2 \text{ (đpcm)}$$

$$\text{Mặt khác } OB = R \Rightarrow OH \cdot OC = OB^2$$

$$\Rightarrow \frac{OH}{OB} = \frac{OB}{OC}$$

TITLE:

TITLE:

Xét $\triangle OHB$ và $\triangle OBC$ có:

$$\begin{aligned} & \widehat{BOC} \text{ chung} \\ & \frac{OH}{OB} = \frac{OB}{OC} \text{ (cmt)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \triangle OHB \sim \triangle OBC \text{ (c.g.c)}$$

c) Vì DMHT là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{M}_1 = \widehat{H}_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DI)

Xét tứ giác AHDC có: $\widehat{AHC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, mà hai đỉnh H, D kề nhau cùng nhìn AC dưới các góc bằng nhau nên AHDC là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{A}_1 \text{ (2 góc nội tiếp chắn cung DC)}$$

Mặt khác $\widehat{A}_1 = \widehat{ABD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AD)

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{ABD}$$

Mà 2 góc này ở vị trí hai góc đồng vị bằng nhau nên $MI \parallel AB$

$$\Rightarrow \widehat{M}_2 = \widehat{HAB} \text{ (góc so le)}$$

Mà $\widehat{M}_2 = \widehat{D}_2$ (góc nội tiếp chắn cung HI)

$$\Rightarrow \widehat{D}_2 = \widehat{HAB} \text{ (1)}$$

Ta có: $\triangle OHB \sim \triangle OBC$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{HBO} = \widehat{BCO}$ (góc tương ứng)

Mà $\widehat{BCO} = \widehat{A}_2$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DH)

$$\Rightarrow \widehat{HBO} = \widehat{A}_2 \text{ (2)}$$

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle DHA$ có:

$$\widehat{HBO} = \widehat{A}_2$$

$$\widehat{HAB} = \widehat{D}_2$$

$$\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle DHA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHB} = \widehat{AHD}$$

$$\Rightarrow 180^\circ - \widehat{AHB} = 180^\circ - \widehat{AHD}$$

$$\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{DHM}$$

$\Rightarrow HM$ là phân giác của góc BHD

$$\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{HD}{HB}$$

TITLE:

Câu 5:

$$\begin{aligned}
 1) A &= \frac{a^5}{120} + \frac{a^4}{12} + \frac{7a^3}{24} + \frac{5a^2}{12} + \frac{a}{5} \\
 &= \frac{a}{120} (a^4 + 10a^3 + 35a^2 + 50a + 24) \\
 &= \frac{a}{120} (a^4 + 3a^3 + 2a^2 + 7a^3 + 21a^2 + 14a + 12a^2 + 36a + 24) \\
 &= \frac{a}{120} [a^2(a^2 + 3a + 2) + 7a(a^2 + 3a + 2) + 12(a^2 + 3a + 2)] \\
 &= \frac{a}{120} (a^2 + 3a + 2)(a^2 + 7a + 12) \\
 &= \frac{a}{120} [(a(a+1) + 2(a+1)) \cdot (a(a+3) + 4(a+3))] \\
 &= \frac{1}{120} a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)
 \end{aligned}$$

Xét $M = a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)$

Với $\forall a \in \mathbb{N}$, ta có:

- +) M chứa tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên $M:3$
- +) M là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên $M:5$
- +) Trong tích có ít nhất 2 số tự nhiên chẵn liên tiếp, nên $M:8$

Vì $(3, 5, 8) = 1$ và $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$ nên $M:120$

Vậy A là số tự nhiên $\forall a \in \mathbb{N}$

2,

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có:

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{ab^2} = 2b\sqrt{a}$$

$$\frac{2}{\sqrt{a}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 1 \leq \left(\frac{1}{a} + 1 \right) \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + 1 \right)$$

Ta có:

$$\frac{a}{b^3+ab} = \frac{a+b^2-b^2}{b(a+b^2)} = \frac{1}{b} - \frac{b}{a+b^2} \geq \frac{1}{b} - \frac{b}{2b\sqrt{a}} = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + 1 \right)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{c^3+bc} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + 1 \right); \quad \frac{c}{a^3+ac} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + 1 \right)$$

Suy ra:

$$\frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ac} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + 1 \right) + \frac{1}{c} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + 1 \right) + \frac{1}{a} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ac} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ac} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ac} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{a+b+c-4}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ac} \geq \frac{3}{4} \left[\left(\frac{1}{a} + a \right) + \left(\frac{1}{b} + b \right) + \left(\frac{1}{c} + c \right) - 4 \right] \geq \frac{3}{4} (2+2+2-4) = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra ($\Rightarrow$) $a=b=c=1$