

①

Bài 1.

a. Với $x=4$ ta có: $Q = \frac{\sqrt{4}}{4+4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b. Ta có: $P = \left(\frac{x-6\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x+4}{1-x} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$

$$= \frac{x-6\sqrt{x}+1 - (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{1-x}{x+4}$$

$$= \frac{x-6\sqrt{x}+1 - x+2\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x+4}$$

$$= \frac{(-4\sqrt{x}) \cdot (-1)}{x+4} = \frac{4\sqrt{x}}{x+4} = 4 \cdot Q$$

Vậy $P = 4 \cdot Q$.

b. Ta có $P = \frac{4\sqrt{x}}{x+4} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

Lại có $\frac{4\sqrt{x}}{x+4} = \frac{4}{\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}} \leq \frac{4}{2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}}} = 1$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{4\sqrt{x}}{x+4} \leq 1$

Mà P nhận giá trị nguyên $\Rightarrow P \in \{0; 1\}$

Với $P=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0$

Với $P=1 \Rightarrow \frac{4\sqrt{x}}{x+4}=1 \Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+4=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)^2=0 \Leftrightarrow x=4$.

Vậy với $x \in \{0; 4\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

Bài 2.

a) Thay $m=2$ vào hệ phương trình ta có

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ -x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=1 \\ -x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy với $m=2$ thì hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (\frac{1}{3}; \frac{7}{3})$

b) Ta có hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=3 \\ -x+y=2 \end{cases} \Rightarrow y=2+x$

Ta có: $x^2+xy^2=10 \Rightarrow x^2+(2+x)^2=10 \Leftrightarrow 2x^2+4x-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$

$$(2) \text{ Với } x=1 \Rightarrow \begin{cases} m \cdot 1 + y = 3 \\ -1 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ m = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } x=-3 \Rightarrow \begin{cases} m(-3) + y = 3 \\ 3 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ m = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy với $m \in \{0; -\frac{4}{3}\}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x^2 + y^2 = 10$.

Bài 3.

a) Đường (d) đi qua điểm $A(2; 8)$

$$\Rightarrow 8 = 2 + m$$

$$\Leftrightarrow m = 6$$

Vậy với $m = 6$ thì (d) đi qua điểm $A(2; 8)$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$2x^2 = x + m$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - m = 0 \quad (*)$$

Đường (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

$\Rightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 8m > 0$$

$$\Leftrightarrow m > -\frac{1}{8}$$

Theo hệ thức Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{m}{2} \end{cases}$

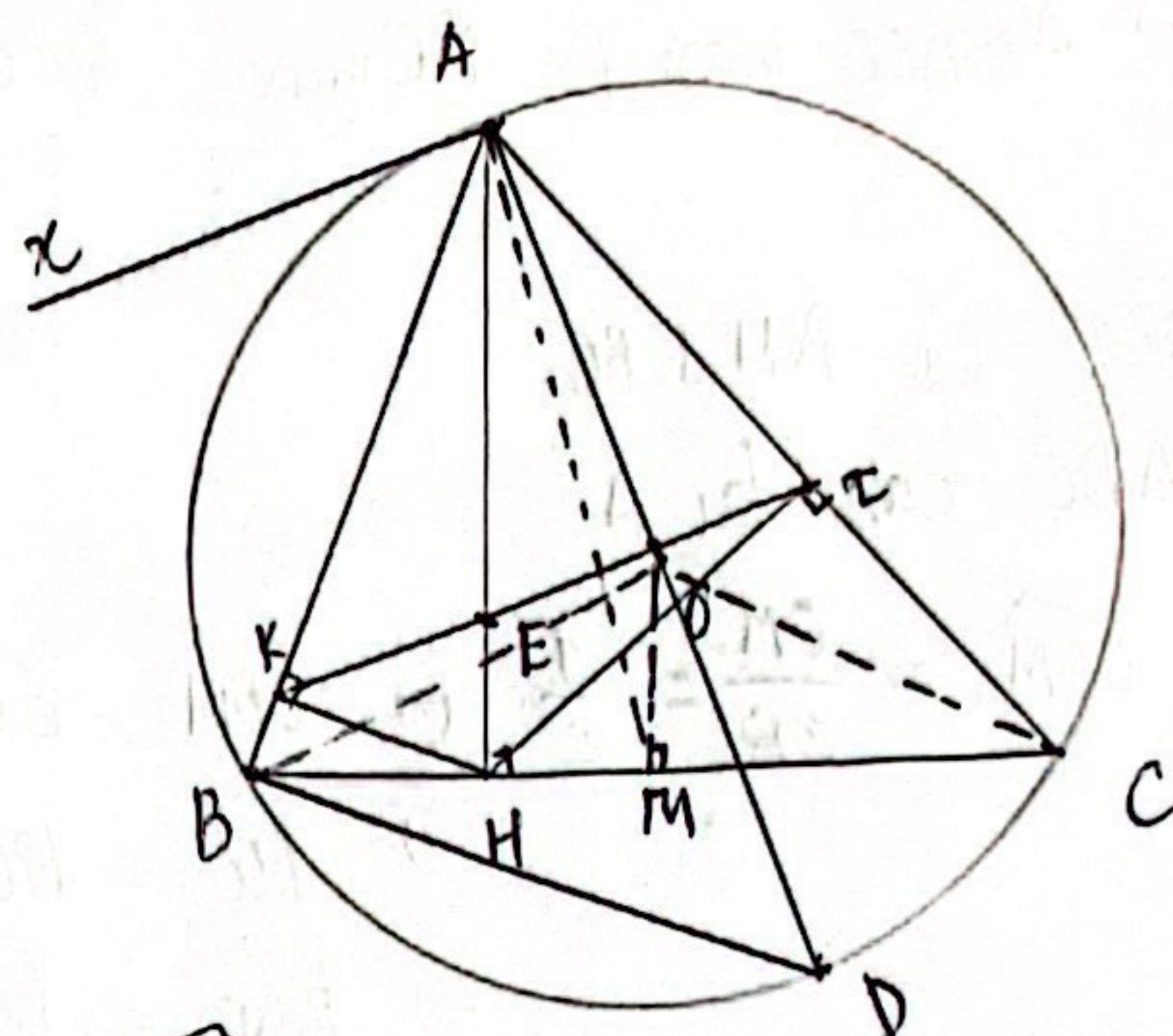
$$\text{Ta có } x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{m}{2}\right) = 5 \Leftrightarrow m = 3 \text{ (thỏa)}$$

Vậy với $m = 3$ thì (d) cắt (P) tại 2 điểm

phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 5$.

Bau 4.



a) Ta có $HK \perp AB \rightarrow \widehat{HKA} = 90^\circ$
 $HI \perp AC \rightarrow \widehat{HIA} = 90^\circ$ } $\rightarrow \widehat{HKA} + \widehat{HIA} = 180^\circ$
 Mà 2 góc nằm ở vị trí đối nhau }
 $\Rightarrow$ 3' góc $AKHI$ nội tiếp.

b) Ta' góc $\widehat{AKHI}$ nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{KAH} = \widehat{KIH}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{KH}$)

$\triangle AEF \cong \triangle AEG$ và $\triangle DEH$ có: $\widehat{KAE} = \widehat{HIE}$ (cmt); $\widehat{AEK} = \widehat{IEH}$ (đối đỉnh)
 $\Rightarrow \triangle AEF \cong \triangle DEH$ (g.c.g)

→ $\triangle A E K \sim \triangle I E H$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AE}{IE} = \frac{EK}{EH}$ (hằng ứng) $\Rightarrow EA \cdot EH = EK \cdot EI$ (đpcm)

c) Kết hợp nguyên Ax $\rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{ACB}$ (tính chất)

Ta có: $\widehat{AKI} = \widehat{AHP}$ (cùng chắn $\widehat{AP}$)

mà $\widehat{AHI} = \widehat{HCI}$ (cùng phụ với $\widehat{IHC}$) $\Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{BAx} = \widehat{ACB}$ (cmt)
 $\Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{BAx}$
 Mà Góc nằm ở vị trí so le trong?

Mà 2 góc nằm ở vị trí so le trong

Nhà Ax là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Ax \parallel KI \\ Ax \perp AO \end{array} \right\} \Rightarrow KI \perp AO \text{ (đpcm).}$

d) kẻ đường kính AD.

Xét $\triangle AHC$ và $\triangle ABD$ có: $\widehat{AHC} = \widehat{ABD} = 90^\circ$; $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} (= \frac{1}{2} \widehat{AB})$

$\rightarrow \triangle AHC \sim \triangle ABD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AD}$ (hằng vng) $\Rightarrow AH \cdot AD = AB \cdot AC$

f) $\text{At. LR} = 3R^2$

$$b) AH = \frac{3R}{2}$$

Ke' $OM \perp BC \Rightarrow OA + OM \geq AM \geq AH \Rightarrow OM \geq AH - OA$

($\rightarrow$) $OM \geq \frac{R}{2}$.

④ Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$ } $\Rightarrow S_{\triangle ABC} \max \Leftrightarrow BC \max \Leftrightarrow OM \min \Leftrightarrow OM = \frac{R}{2}$.
 Mà $AH = \frac{3}{2} R$ không đổi
 $\Leftrightarrow A, O, M$ thẳng hàng và $AM \perp BC$
 $\Leftrightarrow BC \perp AO \Leftrightarrow \triangle ABC$ cân tại A
 Mà $OM = \frac{R}{2} \Rightarrow \sin \widehat{OBM} = \frac{OM}{OB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OCM} = 30^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2} = 60^\circ$
 Mà $\triangle ABC$ cân tại A
 $\Rightarrow \triangle ABC$ đều.

Vậy để tam giác ABC có diện tích lớn nhất thì $\triangle ABC$ đều.

2.

Vi $S_{\text{đáy}} = 16\pi \text{ (cm}^2\text{)} \Rightarrow \pi \cdot R^2 = 16\pi \Leftrightarrow R = 4 \text{ (cm)}$

Do chiều cao gấp 3 lần bán kính đáy $\Rightarrow h = 3 \cdot R = 12 \text{ (cm)}$

Vậy thể tích của hình nón là: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 64\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Vậy ...

Bài 5.

Pho BDT Cauchy.

$$\frac{xy^3}{y^3+4} = \frac{\frac{xy^3}{2} + \frac{xy^3}{2}}{\frac{y^3}{2} + \frac{y^3}{2} + 4} \leq \frac{xy^3}{3\sqrt[3]{\frac{y^3}{2} \cdot \frac{y^3}{2} \cdot 4}} = \frac{xy^3}{3y^2} = \frac{xy}{3}$$

Tương tự $\Rightarrow P \leq \frac{xy + yz + xz}{3} \leq \frac{(x+y+z)^2}{9} = \frac{36}{9} = 4$

(Do $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{3} \geq xy + yz + xz$)

$\Rightarrow \max P = 4$

Đấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 2$.