

Câu 1:

a) $A = \sqrt{36} - \sqrt{4} = 6 - 2 = 4$

$B = \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} + \sqrt{15} = |4 - \sqrt{15}| + \sqrt{15} = 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} = 4$

$C = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5.$

b)

1) $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+3}, \text{ với } x \geq 0; x \neq 9$

$= \frac{\sqrt{x}+3 + 1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+4}$

$= \frac{\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4)} = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$

Vậy $P = \frac{1}{\sqrt{x}-3}$

2) Để $P = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-3} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{x}-3 = 2$

$\Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25 \text{ (nhận)}$

Vậy với $x = 25$ thì $P = \frac{1}{2}.$

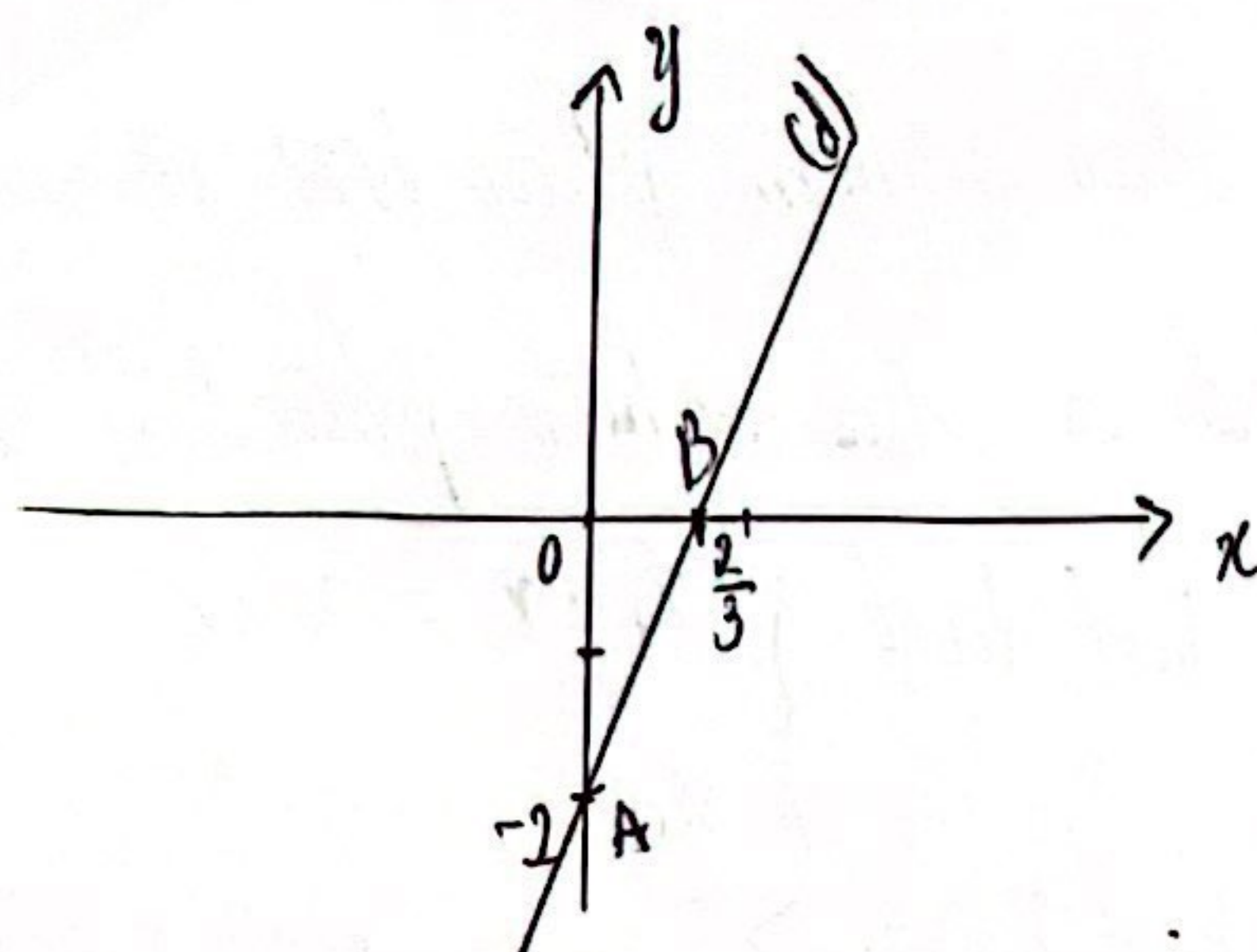
Câu 2

a) Ta có (d): $y = 3x - 2$

Xét $x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (d)$ đi qua $A(0; -2)$

Xét $y = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow (d)$ đi qua $B(\frac{2}{3}; 0)$

Ta có đồ thị



b) Ta có phương trình tọa độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = 3x - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) - (x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{Với } x=2 \Rightarrow y=4$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow y=1$$

Vậy tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số (P) với đường thẳng (d) là $(x, y) \in \{(2, 4); (1, 1)\}$.

Câu 3

$$a) \text{ Ta có } \begin{cases} x+y=5 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=15 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (3, 2)$

$$b) \text{ Ta có: } x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 2x + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-7) - 2(x-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-7)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=2 \end{cases}$$

> Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{7; 2\}$.

$$c) x^2 - (m+2)x + m-3 = 0 \quad (*)$$

$$1) \text{ Xét } \Delta = [-(m+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m-3) = m^2 + 4m + 4 - 4m + 12 = m^2 + 16 > 0 \quad \forall m$$

$\Rightarrow$ pt(*) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

2) Ta có pt(*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{nên theo hệ thức Viét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = m+2 \\ x_1 \cdot x_2 = m-3 \end{cases}$$

$$\text{Theo đề ta có: } x_1 + x_2 + 2x_1x_2 > 5 \Rightarrow m+2 + 2(m-3) > 5 \Leftrightarrow 3m - 4 > 5 \Leftrightarrow m > 3$$

Vậy với $m > 3$ thì pt có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 > 5$.

Câu 4.

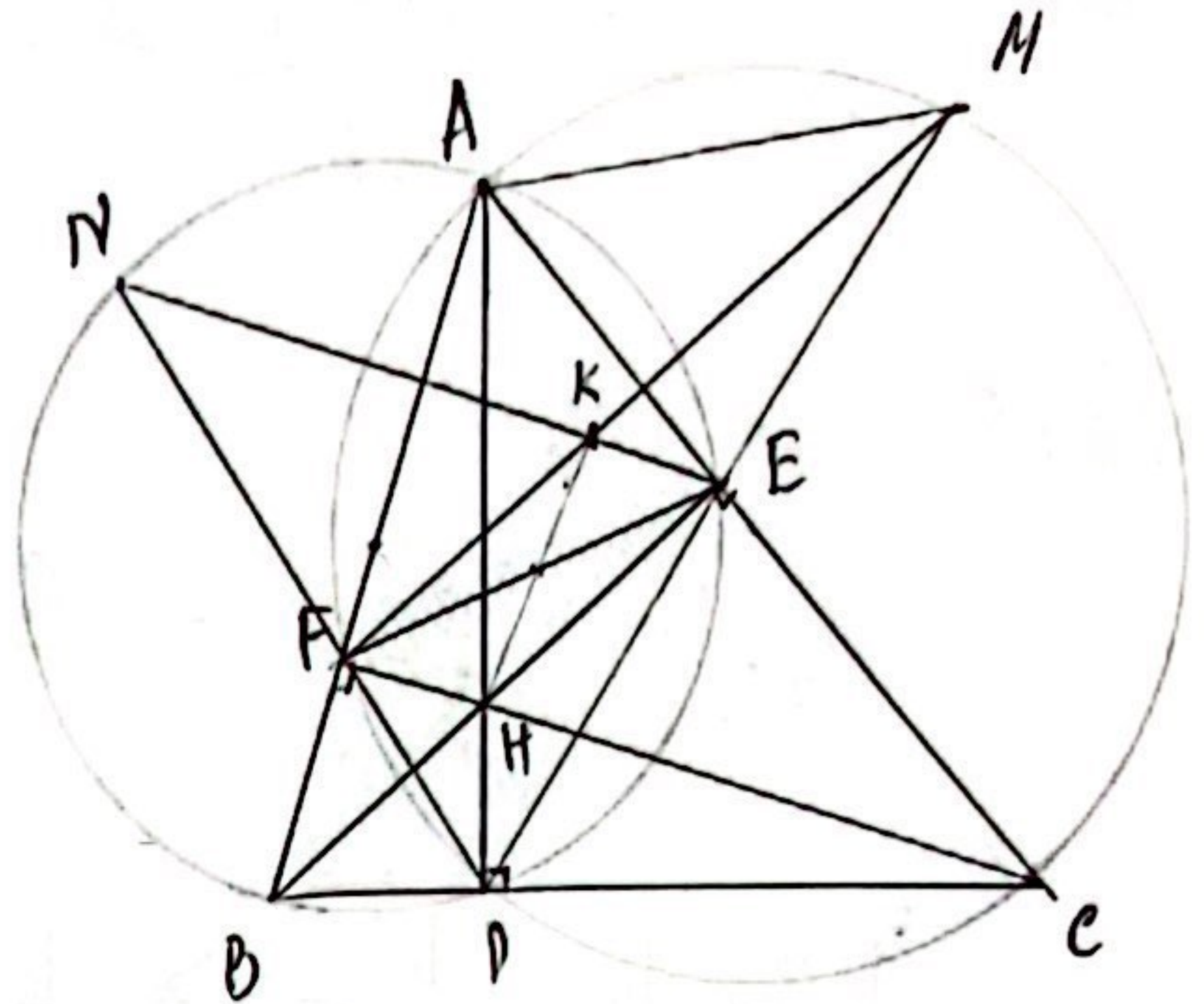
a) Ta có $BE \perp AC \rightarrow \widehat{AEB} = 90^\circ$
 $CF \perp AB \rightarrow \widehat{AFC} = 90^\circ$

Xét tứ giác AFHE có

$$\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$$

Mà 2 góc ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác AFHE nội tiếp (đpcm)



b) Xét tứ giác CEHD có

$$\widehat{CEH} = 90^\circ$$

$$\widehat{CDH} = 90^\circ$$

$$\} \rightarrow \widehat{CEH} + \widehat{CDH} = 180^\circ$$

Mà 2 góc nằm ở vị trí đối diện nhau $\} \rightarrow$ tứ giác CEHD nội tiếp

$$\rightarrow \widehat{ECH} = \widehat{EDH} \text{ (cùng chắn } \widehat{EH})$$

Xét $\triangle EAD$ và $\triangle EFC$ có:

$$\widehat{EDA} = \widehat{FCE} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{EAD} = \widehat{EFC} \text{ (cùng chắn } \widehat{EH}) \} \rightarrow \triangle EAD \sim \triangle EFC \text{ (g.g)}$$

c) Ta có $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^\circ \rightarrow F$ và D nằm trên đường tròn đường kính AC

$$\rightarrow \widehat{AFM} = \widehat{ADM} \text{ (cùng chắn } \widehat{AM})$$

$$\text{Mà } \widehat{ADM} = \widehat{ACF} \text{ (cùng chắn } \widehat{EH}) \} \Rightarrow \widehat{AFM} = \widehat{AMF}$$

$$\widehat{ACF} = \widehat{AMF} \text{ (cùng chắn } \widehat{AF}) \} \Rightarrow \triangle AFM \text{ cân tại A}$$

$$\Rightarrow AF = AM \text{ (đpcm)}$$

Ta có: $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^\circ \rightarrow E$ và D nằm trên đường tròn đường kính AB

$$\rightarrow \widehat{AEN} = \widehat{ADN} \text{ (cùng chắn } \widehat{AN})$$

$$\text{Ta có } \text{Mà } \widehat{ACF} = \widehat{ADF} \text{ (cùng chắn } \widehat{AF}) \} \Rightarrow \widehat{AEN} = \widehat{ACF}$$

Mà 2 góc nằm ở vị trí đồng vị

$$\Rightarrow EN \parallel CF \text{ hay } EK \parallel HF \text{ (1)}$$

$$\text{Ta có } \widehat{AFM} = \widehat{ADM} \text{ (cùng chắn } \widehat{AM})$$

$$\widehat{ADN} = \widehat{ABE} \text{ (cùng chắn } \widehat{AE}) \} \Rightarrow \widehat{AFM} = \widehat{ABE}$$

Mà 2 góc nằm ở vị trí đồng vị

$$\Rightarrow FM \parallel BE \text{ hay } FK \parallel HE \text{ (2)}$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow FKEH$ là hình bình hành (đhnb) $\} \Rightarrow EF$ đi qua trung điểm của HK

Mà EF và KH là 2 đường chéo

Câu 5: a^3

Ta có: $\frac{a^3}{a^2+b} = \frac{a^3+ab-ab}{a^2+b} = a - \frac{ab}{a^2+b} \geq a - \frac{ab}{2\sqrt{a^2b}} = a - \frac{1}{2}\sqrt{b}$

Tương tự: $\frac{b^3}{b^2+c} \geq b - \frac{1}{2}\sqrt{c}$; $\frac{c^3}{c^2+a} \geq c - \frac{1}{2}\sqrt{a}$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{a^2+b} + \frac{b^3}{b^2+c} + \frac{c^3}{c^2+a} \geq a+b+c - \frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

$$\geq 3 - \frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

Ma: $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \leq 3(a+b+c)$ (BĐT Bunhiacopxki)

$\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{3 \cdot 3} = 3$

$\Rightarrow -(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geq -3$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{a^2+b} + \frac{b^3}{b^2+c} + \frac{c^3}{c^2+a} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Đã là "xảy ra" khi $a=b=c=1$
 $\Rightarrow$ đpcm.