

Câu I

$$1. P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - 1 \right) \quad (x > 0, x \neq 1)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{x-1} : \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$2. P = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{2(\sqrt{x}+1)-1}{\sqrt{x}+1} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Để P nguyên thì $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ nguyên $\Rightarrow \sqrt{x}+1 \in U(1) = \{\pm 1\}$.

$$\Rightarrow \sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow x=0 \text{ (t/m)} \quad \Rightarrow \sqrt{x} \in \{0\}$$

$$+ \sqrt{x}+1 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -2 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy với $x=0$ thì P nguyên.

Câu II

$$1. x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Delta' = 2^2 - 2\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = 2 - (\sqrt{3}-1) = 3-\sqrt{3} \quad ; \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}-1 = 1+\sqrt{3}$$

$$2. \begin{cases} 2\sqrt{x-1} + \frac{1}{y} = 4 \\ \sqrt{x-1} - \frac{1}{y} = -1 \end{cases}$$

(I) ĐKXĐ: $x \neq 1, y \neq 0$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{x-1} = a, a \geq 0 \\ \frac{1}{y} = b, b \neq 0 \end{cases}$$

$$(I) \text{ trở thành: } \begin{cases} 2a+b=4 \\ a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=3 \\ b=a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2; \frac{1}{2})$.

Câu III

$$(P): y = x^2$$

$$(d): y = 2mx - m^2 - m - 2$$

1. Thay $x = -3$ vào pt (P) được $y = (-3)^2 = 9$ Vậy $M(-3; 9) \in (P)$.

2. Pt hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = 2mx - m^2 - m - 2 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + m + 2 = 0$$

$$\Delta' = m^2 - (m^2 + m + 2) = -m - 2$$

Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì (V) có 2 nghiệm p biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$
 $\Leftrightarrow m < -2$

$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) \in (P) &\Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1^2 \\ y_2 = x_2^2 \end{cases} \\ B(x_2, y_2) \in (P) &\end{aligned}$$

$$\text{Theo Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + m + 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } x_1 y_2 + x_2 y_1 = 2m^3 + 6$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2^2 + x_2 \cdot x_1^2 = 2m^3 + 6$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_2 + x_1) = 2m^3 + 6$$

$$\Leftrightarrow x_1 (m^2 + m + 2) \cdot 2m = 2m^3 + 6$$

$$\Leftrightarrow 2m^3 + 2m^2 + 4m = 2m^3 + 6$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (\text{loại}) \\ m = -3 & (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Vậy $m = -3$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu IV

Cho số tiền nhà bác An và bác Bình dùng trong tháng 4 lần lượt là

$$x, y \text{ (đồng)} \quad (x, y > 0)$$

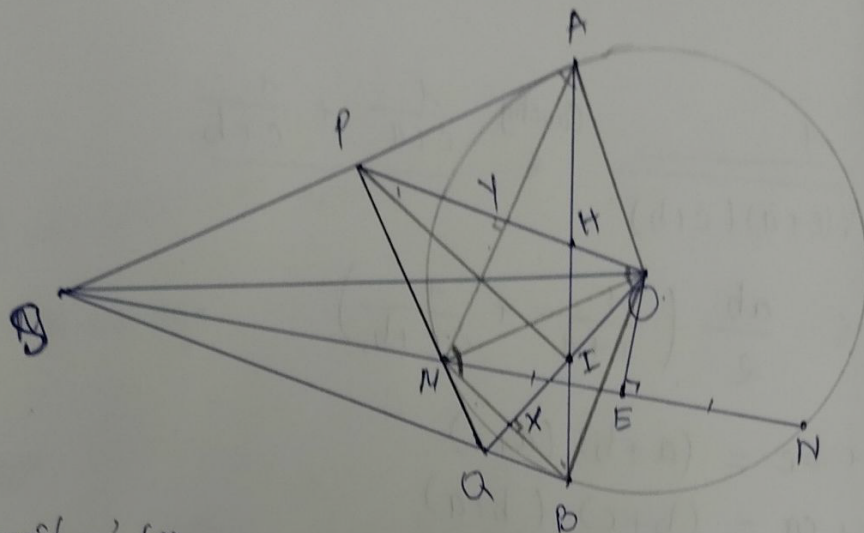
Tháng 5, nhà bác An tiết kiệm được $15\% x = 0,15x$ (đồng)

Bác Bình $10\% y = 0,1y$ (đồng)

$$\text{Theo bài ra ta có hệ: } \begin{cases} x + y = 500000 \\ 0,15x + 0,1y = 65000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 300000 \\ y = 200000 \end{cases} \text{ (đ)} \quad (+1m)$$

Vậy trong tháng 4, nhà bác An dùng hết 300000 đồng tiền chi;
nhà bác Bình dùng hết 200000 đồng tiền chi.

Câu V:



- a) SA là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow SA \perp AO \Rightarrow \widehat{SAO} = 90^\circ$
 SB ————— (O) $\Rightarrow SB \perp OB \Rightarrow \widehat{SBO} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{SAO} + \widehat{SBO} = 180^\circ$
 $\Rightarrow$ tứ giác SAOB nội tiếp.

- b). Xét tam giác SBN và tam giác SMB có:

$\widehat{NSB}$ chung

$\widehat{MBS} = \widehat{MNB}$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp)

$$\Rightarrow \triangle SBN \sim \triangle SMB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{SB}{SM} = \frac{SN}{SB} \Rightarrow SB^2 = SM \cdot SN.$$

- c) Xét $\triangle$ vuông E là trung điểm MN $\Rightarrow OE \perp MN$.

$$ME = \frac{MN}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } \triangle \text{ vuông OME có: } OM^2 &= OE^2 + ME^2 \Rightarrow OE^2 = OM^2 - ME^2 \\ &= R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{2} \\ \Rightarrow OE &= \frac{R}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Xét } \triangle \text{ vuông SOE có: } SE^2 = SO^2 - OE^2 = 5R^2 - \frac{R^2}{2} = \frac{9R^2}{2} \Rightarrow SE = \frac{3R}{\sqrt{2}}.$$

$$SM = SE - ME = \frac{3R}{\sqrt{2}} - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}R.$$

$$S_{\triangle SOM} = \frac{1}{2} OE \cdot SM = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}R = \frac{R^2}{2} \text{ (đvdt)}.$$

d) Hai nếp gấp MQ và QB cắt nhau tại Q

$$\Rightarrow MQ = QB$$

$$\text{lại có: } OM = OB$$

$\Rightarrow OQ$ là đường trung trực của đoạn thẳng MB .

$$\Rightarrow OQ \perp MB.$$

chứng minh tương tự ta có: $AM \perp PO$.

Coi X là giao của OQ và MB
 Y là giao của AM và PO $\Rightarrow \widehat{MYO} = 90^\circ, \widehat{MXO} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{MYO} + \widehat{MXO} = 180^\circ \Rightarrow MXY \text{ nội tiếp.}$$

$$\Rightarrow \widehat{POQ} + \widehat{AMB} = 180^\circ.$$

$$\text{mà } (\widehat{PMA} + \widehat{BMQ}) + \widehat{AMB} = 180^\circ.$$

$$\Rightarrow \widehat{POQ} = \widehat{PMA} + \widehat{BMQ} = \widehat{PAM} + \widehat{MAB} \quad (\text{tính chất nếp gấp})$$
$$= \widehat{PAB}.$$

$$\text{hay } \widehat{POI} = \widehat{PAI} \Rightarrow \text{hệ góc } PAOI \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{PAO} + \widehat{PIO} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{PIO} = 180^\circ - \widehat{PAO} = 90^\circ.$$

$$\Rightarrow PI \perp OQ$$

hoàn toàn tương tự ta chứng minh được: $QH \perp PO$.

$$\text{lại có } MO \perp PQ.$$

$\Rightarrow PI, QH$ và MO là 3 đường cao của $\triangle POQ$

$\Rightarrow PI, QH$ và MO đồng quy tại 1 điểm.

Câu VI

$$a+b+c=1 \Rightarrow c(a+b+c)=c \Rightarrow ca+cb+c^2+ab=c+ab$$
$$\Rightarrow c+ab = \cancel{c(a+b)} + c(a+c) + b(a+c) = (a+c)(b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c+ab}} = \frac{1}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \frac{\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right)$$

Tương tự: $a+bc = (a+b)(a+c)$
 $b+ca = (b+c)(b+a)$

$$\Rightarrow \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right)$$

$$\frac{ca}{\sqrt{b+ca}} \leq \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+a} \right)$$

Cộng từng vế: $P = \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} + \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ac}{\sqrt{b+ca}} \leq \frac{bc+ca}{2(a+b)} + \frac{bc+ab}{2(c+a)} + \frac{ca+ab}{2(c+b)}$
$$= \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}$$

Điều "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c = \frac{1}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$ khi $a=b=c = \frac{1}{3}$