

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $P = \left(\frac{x-6\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{x+4}{1-x}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$).

- Tính giá trị biểu thức Q với $x = 4$.
- Chứng minh rằng $P = 4Q$.
- Tìm tất cả các giá trị của x để P nhận giá trị là các số nguyên.

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ (với m là tham số)

- Giải hệ phương trình với $m = 2$.
- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 10$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$ (với m là tham số).

- Tìm m để (d) đi qua điểm $A(2; 8)$.
- Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 5$.

Câu 4. (3,5 điểm)

1) Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Kẻ AH vuông góc với BC tại H , HK vuông góc với AB tại K và HI vuông góc với AC tại I .

- Chứng minh tứ giác $AKHI$ nội tiếp.
- Gọi E là giao điểm của AH với KI . Chứng minh rằng $EA.EH = EK.EI$.
- Chứng minh KI vuông góc với AO .
- Giả sử điểm A và đường tròn $(O; R)$ cố định, còn dây cung BC thay đổi sao cho $AB.AC = 3R^2$. Xác định vị trí của dây cung BC sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

2) Một hình nón có diện tích đáy bằng $16\pi (cm^2)$ và có chiều cao gấp ba lần bán kính đáy. Tính thể tích của hình nón đó.

Câu 5. (0,5 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{xy^3}{y^3 + 4} + \frac{yz^3}{z^3 + 4} + \frac{zx^3}{x^3 + 4}$$

--- HẾT ---