|  |  |
| --- | --- |
| **PHÒNG GD&ĐT** **THÀNH PHỐ HƯNG YÊN**-----------------*(Đề thi có 2 trang)* | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH****NĂM HỌC 2022 - 2023****MÔN: TOÁN**Thời gian làm bài: 180 phút*(Không kể thời gian phát đề)* |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Họ và tên: ........................................ | Số báo danh: ........... | **Đề gốc** |

**Câu 1** Cho dãy số   $(u\_{2})$   xác định bởi
$u\_{1}=2,(n+1)u\_{1+1}u\_{n}=nu\_{n}^{2}+1$
Với mọi n nguyên dương.
a) Chứng minh rằng   $\frac{1}{u\_{1}}+\frac{1}{u\_{2}}+...+\frac{1}{u\_{2022}}=2023u\_{2023}-2$
b) Tìm số thực c lớn nhất sao cho   $u\_{n}\geq c$   Với mọi số nguyên dương n.

**Câu 2** Cho p là số nguyên tố và   $\overset{¯}{a\_{n}a\_{n-1}...a\_{1}a\_{0}}$   là biểu diễn thập phân của nó   $(a\_{n}>1)$.  Xét đa thức: $P(x)=a\_{n}x^{4}+...+a\_{1}x+a\_{0}$
a) Chứng minh rằng nếu z là một nghiệm (thực hoặc phức) bất kì của   $(P\_{x})$   thì   $|z|=\frac{-11}{2}.$
b) Chứng minh rằng đa thức   $P(x)$   bất khả quy.

**Câu 3:** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường thẳng AI cắt đường thẳng BC tại D, cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M. X là điểm nằm trên đường tròn (O) sao cho   $\overset{\^}{AXI}=90^{0}.$  Đường thẳng XD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P. Đường thẳng PM cắt đường thẳng BC tại Q. Đường thẳng AQ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai R. Chứng minh rằng (PQR) tiếp xúc với AI.

**Câu 4:** Gọi d là tổng độ dài các đường chéo của một đa giác lồi trong mặt phẳng có a đỉnh,   $n>3$   , Gọi p là chu vi của đa giác đó. Chứng minh rằng:
 $n-3<\frac{2d}{p}<\left[\frac{n}{2}\right].\left[\frac{n+1}{2}\right]-2$
(với [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.)

**Câu 5:** Tìm tất cả các hàm số   $f=R\rightarrow R$ thỏa mãn
$$f(xf(y)-y)+f(xy-x)+f(x+y)=2xy.∀x,y\in R$$

**Câu 6:** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), phân giác của góc   $\overset{\^}{BAC}$   cắt (O) tại điểm D khác A; E là điểm đối xứng của B qua AD. Đường thẳng BE cắt (O) tại điể F kkhác B; P là một điểm di chuyển trên cạnh AC; BP cắt (O) tại điểm Q khác B. Đường thẳng đi qua C song song với AQ cắt F' ại điểm G.
a) Gọi EG cắt BC tại điểm H. Chứng minh rằng bốn điểm B, P, E, H cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (O')
b) Gọi (O) cắt (Ơ') tại điểm L khác B. Chứng minh rằng LP luôn đi qua một điểm S cố định khi P di chuyển.
c) Gọi T là trung điểm của PE. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua T song song với LS thì chia đôi AF.

**Câu 7:** Xét dãy số nguyên dương   $(a\_{n})$ có $a\_{1}=1$ và thỏa mãn: với mỗi cặp số nguyên dương   $(n,k)$   bất kỳ thì $a\_{n}|(a\_{k}+a\_{k+1}+...+a\_{k+n-1})$
Tìm giá trị lớn nhất của   $a\_{2022}$