

**Câu 1. ( 5 điểm)**

1) Phân tích đa thức thành nhân tử:

a)  $x^2 - 5xy + 4y^2 + x - y$ .

b)  $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ .

2) Cho các số nguyên  $a, b, c$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 2023$ . Chứng minh rằng  $A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023)$  là số chính phương.

**Câu 2. (5 điểm)**

1) Tìm  $x$  biết: a)  $x^2 - 4x + 3 = 0$

b)  $(x^2 - 4)(x^2 - 10) = 72$ .

2) Tìm  $x, y$  nguyên thỏa mãn:  $xy^2 + 2xy + x - 3y = 0$ .

**Câu 3. (7,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB > AC$ ) có  $\hat{B} = 45^\circ$ , đường cao  $AH$  và  $BK$  cắt nhau tại  $D$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $P$  là điểm đối xứng với  $H$  qua  $M$ .

a) Chứng minh  $AHBP$  là hình vuông.

b) Chứng minh  $HP = 2MK$  và  $\triangle BHD = \triangle AHC$ .

c) Qua  $D$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AH$  tại  $D$ , qua  $C$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$  tại  $C$ , hai đường thẳng này cắt nhau tại  $Q$ . Chứng minh  $P, K, Q$  thẳng hàng.

**Câu 4. (2,0 điểm)**

1) Tìm đa thức dư khi chia đa thức  $P(x)$  cho đa thức  $(x-1)(x^2+1)$  biết đa thức  $P(x)$  chia cho  $x-1$  được dư là 4 và khi chia cho  $x^2+1$  được dư là  $3x+5$ .

2) Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x+y=1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $C = (x^2+4y)(y^2+4x)+8xy$ .

**Câu 5. (1,0 điểm)**

Lấy 2020 điểm thuộc miền trong của một tứ giác để cùng với 4 đỉnh ta được 2024 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác ban đầu là  $1\text{ cm}^2$ . Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ

2024 điểm đã cho có diện tích không vượt quá  $\frac{1}{4042}\text{ cm}^2$ .

**ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM**  
**ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HSG CẤP HUYỆN**  
**NĂM HỌC 2023 - 2024**  
**Môn : Toán 8**

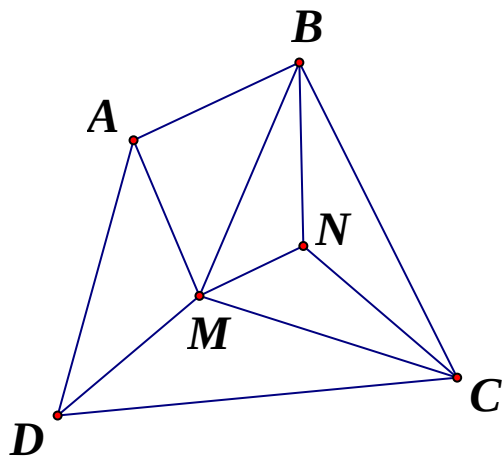
| Câu          | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Điểm                                               |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| <b>Câu 1</b> | <p><b>Câu 1. ( 5 điểm)</b></p> <p>1) Phân tích đa thức thành nhân tử</p> <p>a) <math>x^2 - 5xy + 4y^2 + x - y</math>.</p> <p>b) <math>x^3 - 9x^2 + 6x + 16</math>.</p> <p>2) Cho các số nguyên <math>a, b, c</math> thỏa mãn <math>ab + bc + ca = 2023</math>. Chứng minh rằng nếu <math>A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023)</math> là số chính phương.</p>                                                                                                                                                           | <b>5.0</b>                                         |
| <b>1a</b>    | $x^2 - 5xy + 4y^2 + x - y$ $= x^2 - xy - 4xy + 4y^2 + x - y$ $= x(x - y) - 4y(x - y) + (x - y)$ $= (x - y)(x - 4y + 1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>0.5</b><br><b>0.5</b><br><b>0.5</b>             |
| <b>1b</b>    | $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ $= x^3 - 8x^2 - x^2 + 8x - 2x + 16$ $= x^2(x - 8) - x(x - 8) - 2(x - 8)$ $= (x - 8)(x^2 - x - 2)$ $= (x - 8)(x^2 - 2x + x - 2)$ $= (x - 8)(x - 2)(x + 1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>1.0</b><br><b>1.0</b>                           |
| <b>2</b>     | <p>Ta có:</p> $ab + bc + ca = 2023$ $\Rightarrow a^2 + 2023 = a^2 + ab + bc + ca = a(a + b) + c(b + a) = (a + c)(a + b)$ <p>Chứng minh tương tự ta có:</p> $b^2 + 2023 = (b + a)(b + c); c^2 + 2023 = (c + a)(c + b)$ <p>Khi đó:</p> $A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023)$ $= [(a + b)(b + c)(c + a)]^2$ <p>Vì <math>a, b, c</math> là các số nguyên nên <math>a + b; b + c; c + a</math> là các số nguyên</p> <p>Do vậy <math>[(a + b)(b + c)(c + a)]^2</math> là số chính phương hay <math>A</math> là số chính</p> | <b>0.5</b><br><br><br><b>0.5</b><br><br><b>0.5</b> |

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                               |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|              | <p>phương</p> <p>vậy <math>A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023)</math> là số chính phương với các số nguyên <math>a, b, c</math> thỏa mãn <math>ab + bc + ca = 2023</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                               |
| <b>Câu 2</b> | <p><b>Câu 2. (5 điểm)</b></p> <p>1) Tìm <math>x</math> biết: a) <math>x^2 - 4x + 3 = 0</math><br/> b) <math>(x^2 - 4)(x^2 - 10) = 72</math>.</p> <p>2) Tìm <math>x, y</math> nguyên thỏa mãn <math>xy^2 + 2xy + x - 3y = 0</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <b>5</b>                                                                                                      |
| <b>1</b>     | <p>a)</p> $x^2 - 4x + 3 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 = 0$ $\Leftrightarrow x(x-1) - 3(x-1) = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-3=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$ <p>Vậy <math>x \in \{1; 3\}</math></p> <p>b) <math>(x^2 - 4)(x^2 - 10) = 72</math></p> <p>Đặt <math>x^2 - 7 = y</math>. Khi đó ta có:</p> $(y+3)(y-3) = 72$ $\Leftrightarrow y^2 - 9 = 72$ $\Leftrightarrow y^2 = 81$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y=9 \\ y=-9 \end{cases}$ <p>Với <math>y = 9 \Rightarrow x^2 - 7 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4</math></p> <p>Với <math>y = -9 \Rightarrow x^2 - 7 = -9 \Leftrightarrow x^2 = -2</math> (Vô lí vì <math>x^2 \geq 0</math> với mọi <math>x</math>)</p> <p>Vậy <math>x \in \{-4; 4\}</math>.</p> | <p><b>0.75</b></p> <p><b>0.5</b></p> <p><b>0.25</b></p> <p><b>0.5</b></p> <p><b>0.5</b></p> <p><b>0.5</b></p> |
| <b>2</b>     | $xy^2 + 2xy + x - 3y = 0$ $\Leftrightarrow x(y^2 + 2y + 1) - 3y = 0$ $\Leftrightarrow x(y+1)^2 - 3y = 0$ $\Leftrightarrow x(y+1)^2 - 3(y+1) = -3$ $\Leftrightarrow (y+1)(xy + x - 3) = -3$ <p>Vì <math>x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y+1 \in \mathbb{Z}; xy + x - 3 \in \mathbb{Z}</math> mà <math>-3 = 1 \cdot (-3) = 3 \cdot (-1)</math></p> <p>Ta có bảng giá trị sau</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>0.5</b>                                                                                                    |

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                  |             |               |    |   |     |   |    |    |   |          |    |   |   |    |     |   |                |    |               |  |             |      |             |      |   |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|-------------|---------------|----|---|-----|---|----|----|---|----------|----|---|---|----|-----|---|----------------|----|---------------|--|-------------|------|-------------|------|---|
|          | <table><tr><td><math>y+1</math></td><td>1</td><td>-3</td><td>-1</td><td>3</td></tr><tr><td><math>y</math></td><td>0</td><td>-4</td><td>-2</td><td>2</td></tr><tr><td><math>xy+x-3</math></td><td>-3</td><td>1</td><td>3</td><td>-1</td></tr><tr><td><math>x</math></td><td>0</td><td><math>-\frac{4}{3}</math></td><td>-6</td><td><math>\frac{2}{3}</math></td></tr><tr><td></td><td>Thỏa<br/>mãn</td><td>Loại</td><td>Thỏa<br/>mãn</td><td>Loại</td></tr></table> <p>Vậy các cặp giá trị nguyên <math>(x ; y)</math> cần tìm là:</p> <p style="text-align: center;"><math>(0;0);(-6;-2)</math></p>                                                                                                                                                                 | $y+1$                            | 1           | -3            | -1 | 3 | $y$ | 0 | -4 | -2 | 2 | $xy+x-3$ | -3 | 1 | 3 | -1 | $x$ | 0 | $-\frac{4}{3}$ | -6 | $\frac{2}{3}$ |  | Thỏa<br>mãn | Loại | Thỏa<br>mãn | Loại | 1 |
| $y+1$    | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | -3                               | -1          | 3             |    |   |     |   |    |    |   |          |    |   |   |    |     |   |                |    |               |  |             |      |             |      |   |
| $y$      | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | -4                               | -2          | 2             |    |   |     |   |    |    |   |          |    |   |   |    |     |   |                |    |               |  |             |      |             |      |   |
| $xy+x-3$ | -3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 1                                | 3           | -1            |    |   |     |   |    |    |   |          |    |   |   |    |     |   |                |    |               |  |             |      |             |      |   |
| $x$      | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | $-\frac{4}{3}$                   | -6          | $\frac{2}{3}$ |    |   |     |   |    |    |   |          |    |   |   |    |     |   |                |    |               |  |             |      |             |      |   |
|          | Thỏa<br>mãn                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Loại                             | Thỏa<br>mãn | Loại          |    |   |     |   |    |    |   |          |    |   |   |    |     |   |                |    |               |  |             |      |             |      |   |
| Câu 3    | <p><b>Câu 3. (7,0 điểm)</b></p> <p>Cho tam giác <math>ABC</math> nhọn (<math>AB &gt; AC</math>) có <math>B = 45^\circ</math>. Kẻ đường cao <math>AH</math> và <math>BK</math> cắt nhau tại <math>D</math>. Gọi <math>M</math> là trung điểm của <math>AB</math>, <math>P</math> là điểm đối xứng với <math>H</math> qua <math>M</math>.</p> <p>a) Chứng minh <math>AHBP</math> là hình vuông.</p> <p>b) Chứng minh <math>HP = 2MK</math> và <math>\Delta BHD = \Delta AHC</math></p> <p>c) Qua <math>D</math> kẻ đường thẳng vuông góc với <math>AH</math> tại <math>D</math>, qua <math>C</math> kẻ đường thẳng vuông góc với <math>BC</math> tại <math>C</math>, hai đường thẳng này cắt nhau tại <math>Q</math>. Chứng minh <math>P, K, Q</math> thẳng hàng.</p> | 7                                |             |               |    |   |     |   |    |    |   |          |    |   |   |    |     |   |                |    |               |  |             |      |             |      |   |
|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                  |             |               |    |   |     |   |    |    |   |          |    |   |   |    |     |   |                |    |               |  |             |      |             |      |   |
| 3a       | <p><b>Chứng minh <math>AHBP</math> là hình vuông</b></p> <p>Ta có <math>P</math> đối xứng với <math>H</math> qua <math>M</math> nên <math>M</math> là trung điểm của <math>PH</math>.</p> <p>Xét tứ giác <math>AHBP</math> có <math>M</math> là trung điểm của <math>AB</math> và <math>M</math> là trung điểm của <math>PH</math></p> <p>Suy ra <math>AHBP</math> là hình bình hành</p> <p>Lại có <math>AHB = 90^\circ</math> (do <math>AH</math> là đường cao của tam giác <math>ABC</math>)</p> <p>Do đó <math>AHBP</math> là hình chữ nhật.</p>                                                                                                                                                                                                                 | <p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p> |             |               |    |   |     |   |    |    |   |          |    |   |   |    |     |   |                |    |               |  |             |      |             |      |   |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                            |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
|       | <p>Suy ra <math>PBH = 90^\circ</math> mà <math>ABH = 45^\circ</math> nên <math>BA</math> là phân giác của <math>PBH</math></p> <p>Hình chữ nhật <math>AHBP</math> có <math>BA</math> là phân giác của <math>PBH</math> nên <math>AHBP</math> là hình vuông.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0.5                                        |
| 3b    | <p><b>Chứng minh <math>HP = 2MK</math>.</b></p> <p>Xét <math>\triangle ABK</math> vuông tại <math>K</math> có <math>KM</math> là đường trung tuyến nên <math>KM = \frac{1}{2}AB</math></p> <p>Lại có <math>AHBP</math> là hình vuông nên <math>PH = AB</math></p> <p>Do đó <math>KM = \frac{1}{2}PH \Rightarrow PH = 2KM</math></p> <p><b>Chứng minh <math>\triangle BHD = \triangle AHC</math></b></p> <p>Chứng minh <math>HBD = HAC</math> (cùng phụ với <math>ACB</math>)</p> <p>Vì <math>AHBP</math> là hình vuông nên <math>AH = HB</math></p> <p>Chứng minh <math>\triangle BHD = \triangle AHC</math> (cạnh huyền – góc nhọn)</p>                                       | 0.5<br>0.5<br>0.5<br><br>0.5<br>0.5<br>0.5 |
| 3c    | <p><b>Chứng minh <math>P, K, Q</math> thẳng hàng.</b></p> <p>Gọi <math>O</math> là giao điểm của <math>DC, QH</math></p> <p>C/m <math>HDQC</math> là hình vuông nên <math>DC = QH</math> và <math>O</math> là trung điểm của <math>DC, QH</math></p> <p>Ta có <math>\triangle DKC</math> vuông tại <math>K</math> có <math>KO</math> là đường trung tuyến nên <math>KO = \frac{1}{2}DC</math></p> <p>Do đó <math>KO = \frac{1}{2}QH \Rightarrow \triangle KQH</math> vuông tại <math>K</math> nên <math>HKQ = 90^\circ</math></p> <p>Chứng minh tương tự <math>HKP = 90^\circ</math></p> <p>Do đó <math>PKQ = 180^\circ</math></p> <p>Vậy <math>P, K, Q</math> thẳng hàng.</p> | 0.5<br><br>0.5<br>0.5<br>0.5               |
| Câu 4 | <p>1) Tìm đa thức dư khi chia đa thức <math>P(x)</math> cho đa thức <math>(x-1)(x^2+1)</math> biết đa thức <math>P(x)</math> chia cho <math>x-1</math> được dư là 4 và khi chia cho <math>x^2+1</math> được dư là <math>3x+5</math>.</p> <p>2) Cho <math>x, y</math> là các số thực thỏa mãn <math>x+y=1</math>. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức <math>C = (x^2+4y)(y^2+4x) + 8xy</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                               | 2                                          |
| 4.1   | <p>1)</p> <p>Vì đa thức <math>(x-1)(x^2+1)</math> có bậc là 3</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                            |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                 |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|       | <p><math>\Rightarrow P(x)</math> chia cho đa thức <math>(x-1)(x^2+1)</math> có thương là <math>Q(x)</math> và đa thức dư có dạng là <math>ax^2+bx+c</math></p> $P(x) = (x-1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ $= (x-1)(x^2+1)Q(x) + a(x^2+1) + bx + c - a$ $= [(x-1)Q(x) + a](x^2+1) + bx + c - a$ <p>Do đó <math>P(x)</math> chia cho <math>x^2+1</math> dư <math>bx+c-a</math></p> <p>Mà <math>P(x)</math> chia <math>x^2+1</math> dư <math>3x+5 \Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ c-a=5 \end{cases} \quad (1)</math></p> <p>Lại có <math>P(x)</math> chia <math>(x-1)</math> dư <math>4 \Rightarrow P(1) = 4 \Rightarrow a+b+c = 4 \quad (2)</math></p> <p>.</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra <math>\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \\ c=3 \end{cases}</math></p> | <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> |
| 4.2   | <p>Ta có:</p> $C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy$ $= x^2y^2 + 4x^3 + 4y^3 + 16xy + 8xy$ $= x^2y^2 + 4(x^3 + y^3) + 24xy$ <p>Do <math>x+y=1 \Rightarrow x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 1 - 3xy</math> thay vào C ta được:</p> $C = x^2y^2 + 4(1 - 3xy) + 24xy$ $= x^2y^2 + 12xy + 4$ $= (x^2y^2 + 2xy \cdot 6 + 36) - 32$ $= (xy + 6)^2 - 32 \geq -32$ <p>Dấu = xảy ra khi <math>\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}</math> hoặc <math>\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}</math></p>                                                                                                                                                                                                          | <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> |
| Câu 5 | <p>Lấy 2020 điểm thuộc miền trong của một tứ giác để cùng với 4 đỉnh ta được 2024 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác ban đầu là <math>1 \text{ cm}^2</math>. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2024 điểm đã cho có diện tích không vượt quá <math>\frac{1}{4042} \text{ cm}^2</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1,0                                             |



Xét tứ giác ABCD có diện tích bằng  $1\text{ cm}^2$ .

Với điểm thứ nhất M, ta có 4 tam giác chung đỉnh M đôi một không có điểm trong chung.

0.25

Với điểm thứ hai N phải là điểm trong của một trong 4 tam giác trên.

Nối N với 3 đỉnh của tam giác đó, tạo nên 3 tam giác chung đỉnh N.

0.25

Tuy nhiên số tam giác đôi một không có điểm trong chung chỉ tăng thêm 2 vì mất đi một tam giác chứa điểm N. Số tam giác không có điểm trong chung lúc này là :  $4+2$

Tương tự với  $2020-2=2018$  điểm còn lại, cuối cùng số tam giác đôi một không có điểm trong chung là:  $4+2+2018.2 = 4042$

0.25

Tổng diện tích của 4042 các tam giác đó bằng  $1\text{ cm}^2$ , nên tồn tại ít nhất một tam giác có diện tích không vượt quá  $\frac{1}{4042}\text{ cm}^2$

0.25

**Lưu ý:**

+ Các cách giải khác đáp án nếu đúng, phù hợp với chương trình THCS, ban giám khảo thống nhất cho điểm thành phần tương ứng.

+ Điểm toàn bài là tổng điểm của các câu không làm tròn.

\_\_\_\_\_HẾT\_\_\_\_\_