

TITLE:

Câu I.

1) Đặt $u = x + \sqrt{x^2 + 2023}$ với $u > 0$

Theo đề bài ta có:

$$u \cdot (y + \sqrt{y^2 + 2023}) = 2023$$

$$\Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 + 2023} = \frac{2023}{u}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 2023} = \frac{2023}{u} - y$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2023 = \left(\frac{2023}{u} - y \right)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2023 = \frac{2023^2}{u^2} - 2 \frac{2023y}{u} + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2023y}{u} = \frac{2023^2}{u^2} - 2023$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{y}{u} = \frac{2023}{u^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \cdot u \left(\frac{2023}{u^2} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \left(\frac{2023}{u} - u \right)$$

$$\text{Mà: } u = x + \sqrt{x^2 + 2023}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 2023}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u} = \frac{\sqrt{x^2 + 2023} - x}{(x + \sqrt{x^2 + 2023})(\sqrt{x^2 + 2023} - x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u} = \frac{\sqrt{x^2 + 2023} - x}{x^2 + 2023 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u} = \frac{\sqrt{x^2 + 2023} - x}{2023}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2023} - x = \frac{2023}{u}$$

Date: . . . / No:

TITLE:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2} \left(\frac{2023}{u} - u \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2023+x^2} - x - x - \sqrt{x^2+2023} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (-2x) = -x
 \end{aligned}$$

Taco:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{2024x+y}{2023x-y} = \frac{2024x+(-x)}{2023x-(-x)} = \frac{2024x-x}{2023x+x} \\
 &= \frac{2023x}{2024x} = \frac{2023}{2024}
 \end{aligned}$$

TITLE:

2, Từ giả thiết: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ suy ra

$$\frac{ab+bc+ca}{abc} = 0 \Leftrightarrow ab+bc+ca = 0$$

$$\text{Ta có: } a^2 + 2bc = a^2 + bc - (ab+ca) = a(a-b) - c(a-b) \\ = (a-b)(a-c)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } b^2 + 2ac = (b-a)(b-c) \\ c^2 + 2ab = (c-a)(c-b)$$

Ta có:

$$\frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ca} + \frac{ab}{c^2+2ab}$$

$$= \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{bc}{(a-b)(a-c)} - \frac{ca}{(a-b)(b-c)} + \frac{ab}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{bc \cdot (b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{b^2c - bc^2 - a^2c + ac^2 + a^2b - ab^2}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{ab(a-b) + c^2(a-b) - c \cdot (a^2 - b^2)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{ab(a-b) + c^2(a-b) - (ac + bc) \cdot (a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(ab + c^2 - ac - bc)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 1$$

Đk: $0 \leq x \leq 5$

1) $(x-4)\sqrt{x} - (x-1)\sqrt{5-x} = 2x^2 - 10x + 5$

$\Rightarrow (x-4)\sqrt{x} - (x-4) - (x-1)\sqrt{5-x} + (x-1) = 2x^2 - 10x + 8$

$\Leftrightarrow (x-4)(\sqrt{x}-1) - (x-1)(\sqrt{5-x}-1) = 2(x-1)(x-4)$

$\Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-1)}{\sqrt{x}+1} + \frac{(x-1)(x-4)}{\sqrt{5-x}+1} = 2(x-1)(x-4)$

$\Rightarrow \begin{cases} (x-4)(x-1) = 0 & (1) \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{5-x}+1} = 2 & (2) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

Xét (2): $\begin{cases} \sqrt{x}+1 \geq 1 \\ \sqrt{5-x}+1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{5-x}+1} \leq 1+1=2$

Điều " $=$ " xảy ra

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+1 = 1 \\ \sqrt{5-x}+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}$ vô lí

Vậy $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 4; x = 1$

$$2) \begin{cases} 8\sqrt{xy-2y} - 8y + 4 = (x-y)^2 & (1) \\ 2\sqrt{xy-y^2}(\sqrt{8-2x} - 2\sqrt{2y} + 1) = 4y + 5\sqrt{2-y} - 10\sqrt{x-2} & (2) \end{cases}$$

ĐKXĐ: $\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 8(\sqrt{xy-2y} - y) = (x-y)^2 - 4 \\ &\Rightarrow 8 \cdot \frac{xy-2y-y^2}{\sqrt{xy-2y}+y} = (x-y-2)(x-y+2) \\ &\Leftrightarrow \frac{8y}{\sqrt{xy-2y}+y} \cdot (x-y-2) = (x-y-2)(x-y+2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-2=0 & (*) \\ \frac{8y}{\sqrt{xy-2y}+y} = x-y+2 & (**) \end{cases}$$

Từ (*) $\Rightarrow x = y+2$
Thay $x = y+2$ vào (**) được

$$2\sqrt{xy-y^2}(\sqrt{4-2y} - 2\sqrt{2y} + 1) = 4y + 5\sqrt{2-y} - 10\sqrt{y}$$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{2-y} = a \\ \sqrt{y} = b \end{cases} \quad (0 \leq a, b \leq \sqrt{2})$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2$$

$$\Rightarrow 2ab(\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}b + 1) = 4b^2 + 5a - 10b$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}ab(a-2b) + 2ab - 4b^2 - 5(a-2b) = 0$$

$$\Rightarrow (a-2b)(2\sqrt{2}ab + 2b - 5) = 0 \quad (3)$$

Kết $\begin{cases} 2\sqrt{2}ab \leq 2a^2 + b^2 \\ 2b \leq b^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{2}ab + 2b \leq 2a^2 + 2b^2 + 1 = 5$

TITLE:

Đấu "=" xảy ra chỉ và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{2}a = b \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{vô lí vì } a^2 + b^2 = 2)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}ab + 2b \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}ab + 2b - 5 < 0$$

Vậy (3) $\Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$

$$\Rightarrow \sqrt{2-y} = 2\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow 2-y = 4y \Rightarrow y = \frac{2}{5} \quad (+1n)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5} + 2 = \frac{12}{5} \quad (+1m)$$

TH2: $x-y-2 \neq 0$

+) Giả sử $x-y-2 > 0$ hay $x-y > 2$

$$\Rightarrow xy - y^2 - 2y > 0$$

$$\Rightarrow xy - 2y > y^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{xy-2y} > y$$

$$\Rightarrow \sqrt{xy-2y} + y > 2y$$

$$\Rightarrow \frac{8y}{\sqrt{xy-2y}+y} < 4 \Rightarrow VT(**)$$

$$\Rightarrow VT = \frac{8y}{\sqrt{xy-2y}+y} \cdot (x-y-2) < 4(x-y-2)$$

Kết VP = $(x-y-2)(x-y+2) > (x-y-2)(2+2) = 4(x-y-2)$
 $\Rightarrow VP \Rightarrow$ vô lí

+) Giả sử $x-y-2 < 0$

Tương tự có: $VT > 4 > VP$ (vô lí)

Kết hợp 2 TH, vậy hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$

$$1. (2y - x^2)(2y + x^2) = x(x^4 + 1) + 4y$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 - x^4 = x(x^4 + 1) + 4y$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^4+1) = (2y-1)^2 \quad (1)$$

Đặt $d = \text{UCLN}(x+1, x^4+1) \Rightarrow d \leq \sqrt{2y-1}$ và $\sqrt{2y-1} \leq d$

$$\text{Vì } x^4+1 \equiv (x^4-1)+2 = (x+1)(x-1)(x^2+1)+2 \Rightarrow 2 \mid d \Rightarrow d=1$$

Do đó, x^4+1 phải là số chính phương

mà x^4 là số chính phương, nên được 2 số chính phương cách nhau 1.

$\Rightarrow$ 2 số chính phương đó là 0 và 1.

$\Rightarrow x=0$ thay vào (1) ta được $y=0$ hoặc $y=1$

2. Khai triển p^6-1 ,

$$p^6-1 = (p^3-1)(p^3+1) \quad (2)$$

$$\text{hoặc } p^6-1 = (p^2-1)(p^2-p+1)(p^2+p+1) \quad (3)$$

$$\text{hoặc } p^6-1 = (p^2-1)[(p^2+1)^2-p^2] = (p^2-1)(p^4+p^2+1) \quad (4)$$

Xét p nguyên tố nhỏ nhất > 7

$$\Rightarrow p=11, \text{ từ (3)} \Rightarrow p^6-1 = 120 \cdot 111 \cdot 133$$

$$\Rightarrow p^6-1 = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 19 \cdot 37$$

$$\Rightarrow n > 1 \text{ là ước của } 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 19 \cdot 37 \text{ (khi } p=11)$$

Vì $p^6-1 : n \neq p$ nguyên tố > 7 , dễ thấy loại được

$n(>1)$ là ước của 19.37

(Chọn $p=19$ và $p=37$ là 2 số nguyên tố) cũng loại được $n(>1)$ là ước của 5 (chọn $p=13$),

$$\text{vì từ (2)} \Rightarrow p^6-1 = (p^3-1)(p^3+1) \neq 5 \text{ vì tâm}$$

cung của p^3-1 và p^3+1 là 6 và 8

Ta sẽ chú ra n lớn nhất $= 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$

Tức là $p^6-1 : 504 \neq p$ nguyên tố > 7

$$1. \text{ Vì } p \leq 3 \Rightarrow p^2-1 : 8, \text{ nên từ (3)} \Rightarrow p^6-1 : 8$$

$$2. \text{ Vì } p \neq 3 = 1+1+1 \cdot \text{Từ (4)} \Rightarrow p^6-1 : 9$$

$$3. \text{ Vì } p \neq 7 \Rightarrow p^2 : 7 \text{ dư } 1, 2, 4$$

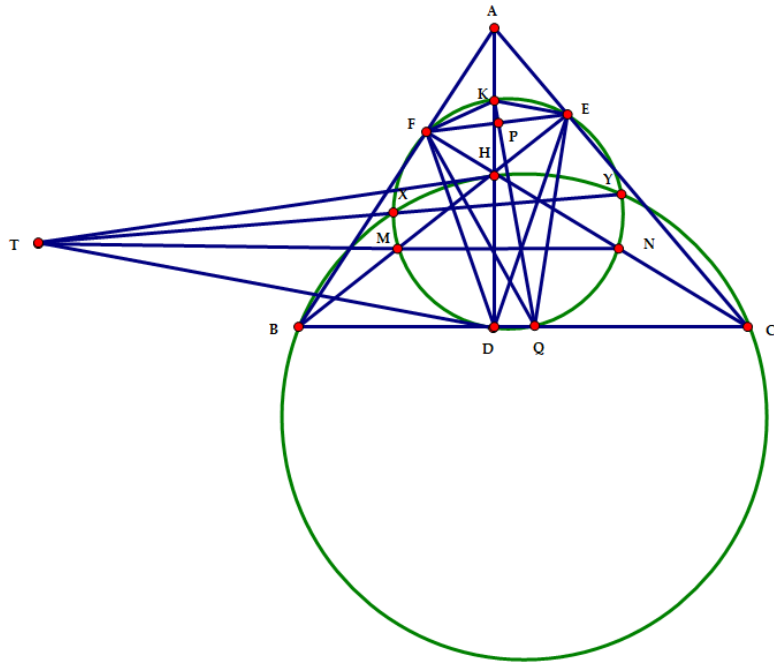
Nếu dư 1 thì $p^2-1 : 7$

Nếu dư 2 thì $p = p^4+p^2+1 : 7$

Date: . . . / No: . . .

LE:

Nếu dư 4, thì $p \equiv 7 \pmod{7}$ (đồng dư $4^4 + 4^2 + 1 = 273 \equiv 7 \pmod{7}$)
 $Tu(4) \Rightarrow p^6 - 1 \equiv 7$
 $V(7, 8, 9) = 1 \Rightarrow p^6 - 1 \equiv 504 \pmod{7}$ và nguyên tố > 7
 $\Rightarrow n_{\max} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 \Rightarrow (\text{đpcm})$



49 $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90$

$\Rightarrow$ Tứ giác $A E H F$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .

K là trung điểm của $AH \Rightarrow AEHF$ nội tiếp đường tròn tâm K , bán kính KA .

chú đố: $\widehat{EKF} = 2 \widehat{EAF} = 2 \widehat{BAC}$

$$\triangle DBF \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{BAC}$$

Tương tự: $\widehat{CDE} = \widehat{BAC}$

$$\widehat{BDF} + \widehat{FDE} + \widehat{CDE} = 180^\circ$$

$$(v) \quad \angle BAC + \angle FDE = 180^\circ$$

G. $\widehat{EKF} + \widehat{FDE} = 180^\circ$

⇒ Tứ giác DEKF nội tiếp đường tròn.

TITLE:

TIT

2. Trong $\triangle BFC$ có $\widehat{BFC} = 90^\circ$
 Mà Q là trung điểm của BC do đó $QF = \frac{BC}{2}$

Tương tự $QE = \frac{BC}{2}$
 Mà Q là trung điểm của BC & nên Q thuộc đường tròn Euler của $\triangle ABC$.

Do đó $KFQE$ là tiếp tuyến mà $KE = KF, QE = QF$
 và P là trung điểm của EF nên K, P, Q thẳng hàng.

$KQ \perp EF$ và KQ là đường kính

$$\Rightarrow \widehat{KEQ} = 90^\circ$$

$$KP \cdot KQ = KE^2 = KH^2 \text{ (do } KE = KH \text{)}$$

$$\Rightarrow (dpcm)$$

3. tương tự câu 1 ta có đường tròn (S) đi qua trung điểm BH, CH . Do đó M là trung điểm BH .

N là trung điểm CH

$$\Rightarrow MN \parallel BC$$

$$\text{Mà } HD \perp BC \Rightarrow MN \perp HD$$

và MN đi qua trung điểm của HD

nên MN là đường trung trực của HD .

$$\text{Ta có } TH = TD$$

$$\text{Lại có: } \widehat{TDK} = \widehat{KED} = \widehat{KEH} + \widehat{HED} \\ = \widehat{ACB} + \widehat{HCB}$$

$$\text{Mà } \widehat{BHD} = \widehat{AHE} = \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \widehat{THB} = \widehat{ACB}$$

Do đó TH là tiếp tuyến của $(BHC), (S)$

$\Rightarrow T, X, Y$ thẳng hàng.