

Bài 1 (2.5 điểm).**(a)** Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{x^2 + 8\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 4} + \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{16 - 4x}{\sqrt{x} + 2} \text{ với } x > 0.$$

(b) Một khay nước có nhiệt độ $125^\circ F$ khi bắt đầu cho vào tủ đá. Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ của khay nước lại giảm đi 20%. Hỏi sau bao nhiêu giờ, nhiệt độ của khay nước chỉ còn là $64^\circ F$?**Lời giải.****(a)** Với $x > 0$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 + 8\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 4} + \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{16 - 4x}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4)}{x - 2\sqrt{x} + 4} + 2\sqrt{x} + 1 + \frac{4(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) + 2\sqrt{x} + 1 + 4(2 - \sqrt{x}) \\ &= x + 9 \end{aligned}$$

(b) Sau mỗi giờ thì nhiệt độ khay giảm đi 20% tức là sau mỗi giờ nhiệt độ của khay đá chỉ bằng $\frac{4}{5}$ nhiệt độ của khay đá ở giờ trước đó. Vậy thì sau giờ thứ n , nhiệt độ khay đá bằng $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ nhiệt độ ban đầu. Ta cần tìm n sao cho:

$$\begin{aligned} 125 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n &= 64 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^n &= \frac{64}{125} \end{aligned}$$

Ta giải ra được $n = 3$. Vậy sau 3 giờ thì nhiệt độ khay nước còn $64^\circ F$.

Bài 2 (3.0 điểm).

- (a) Cho phương trình $x^2 - (2m - 1)x - (m^2 + 1) = 0$ (1) (m là tham số). Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m .
- (b) Cho parabol $(P) : y = ax^2 (a \neq 0)$ đi qua điểm $A \left(-1; \frac{1}{2} \right)$. Tìm tọa độ của điểm M trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ điểm M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ điểm M đến trục hoành.

Lời giải.

- (a) Ta có

$$\Delta_1 = (2m - 1)^2 + 4(m^2 + 1) > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m . Theo hệ thức Vieta, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 x_2 = -(m^2 + 1) \end{cases}$$

Từ đó, ta chứng minh được

$$(x_1 + x_2 + 1)^2 + 4x_1 x_2 = -4.$$

- (b) Vì parabol $(P) : y = ax^2 (a \neq 0)$ đi qua điểm $A \left(-1; \frac{1}{2} \right)$ nên ta được $a = \frac{1}{2}$.

Gọi $M \left(b, \frac{b^2}{2} \right)$ là điểm thuộc parabol (P) . Ta có

$$d(M, Ox) = \left| \frac{b^2}{2} \right| = \frac{b^2}{2}, \quad d(M, Oy) = |b|.$$

Từ giả thiết ta được

$$|b| = 2 \cdot \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow |b| = b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} |b| = 0 \\ |b| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

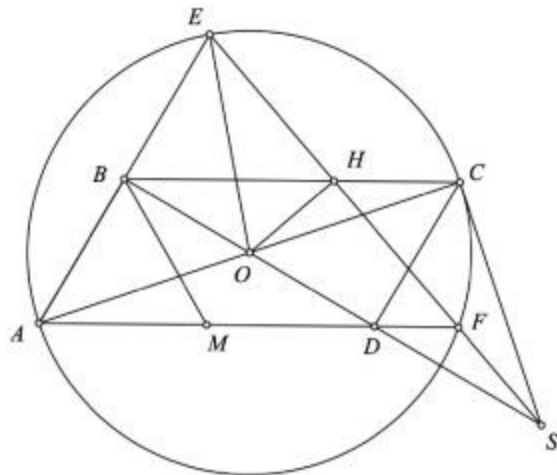
Vậy có ba điểm thỏa mãn đó là $M_1(0, 0)$, $M_2(1, \frac{1}{2})$ và $M_3(-1, \frac{1}{2})$.

Bài 3 (2.5 điểm). Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 120^\circ$ và $BC = 2AB$. Dựng đường tròn (O) có đường kính AC . Gọi E, F lần lượt là các giao điểm thứ hai của AB, AD với đường tròn (O) . Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC, BD tại H, S .

(a) Chứng minh tam giác ABD là tam giác vuông.

(b) Chứng minh tứ giác $OBEH$ nội tiếp.

(c) Chứng minh CS là tiếp tuyến của (O) .



Lời giải 1.

(a) Ta có $ABCD$ là hình bình hành và $BC = 2AB$ nên $AB \parallel CD, AD \parallel BC$ và $AD = BC = 2AB = 2CD$. Suy ra $\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của AD . Ta có $MA = MD = \frac{AD}{2} = AB$ và $\widehat{BAM} = 60^\circ$ nên tam giác ABM là tam giác đều. Suy ra $MB = MA = MD = \frac{AD}{2}$. Do đó, tam giác ABD vuông tại B .

(b) Tam giác OAE cân tại O có $OB \perp AE$ nên B là trung điểm của AE và OB là tia phân giác của $\widehat{AOE}$. Chú ý rằng $BC \parallel AD$, ta có $\widehat{BOE} = \frac{1}{2}\widehat{AOE} = \widehat{AFE} = \widehat{BHE}$. Suy ra tứ giác $OBEH$ nội tiếp.

(c) Xét tam giác AEF có B là trung điểm AE và $BH \parallel AF$, ta có H là trung điểm của EF . Suy ra $OH \perp EF$. Ta có $\widehat{CHS} = \widehat{AFE} = \frac{1}{2}\widehat{AOE} = \widehat{AOB} = \widehat{COS}$. Suy ra tứ giác $OHCS$ nội tiếp. Do đó, $\widehat{SCO} = \widehat{SHO} = 90^\circ$. Suy ra $SC \perp OC$. Vậy SC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải 2.

- (a) Do $ABCD$ là hình bình hành nên $AD = BC$ mà $BC = 2BA$ nên $AD = 2AB$.

Gọi I là trung điểm của AD , ta có: $IA = ID = \frac{AD}{2}$ nên $IA = ID = AB$.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC$ nên $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ mà $\angle ABC = 120^\circ$ nên $\angle BAD = 60^\circ$.

Do $AB = AI$, $\angle BAD = 60^\circ$ nên tam giác ABI đều, hay $IB = IA$ nên $IB = IA = ID = \frac{AD}{2}$. Suy ra tam giác ABD vuông tại B (1).

- (b) Ta có tam giác OAE cân tại O (vì A, E thuộc (O) nên $OA = OE$ mà $OB \perp AE$ (do (1)) nên OB đồng thời là đường trung tuyến, đường phân giác của tam giác OAE . Do đó $\angle AOE = 2\angle BOE$.

Lại có $\angle AOE$ là góc ở tâm và $\angle AFE$ là góc nội tiếp cùng chắn cung AE của (O) nên $\angle AOE = 2\angle AFE$, do đó $\angle BOE = \angle AFE$.

Do $AD \parallel BC$ nên $\angle BHE = \angle AFE$ (góc đồng vị), từ đó $\angle BOE = \angle BHE$. Xét tứ giác $OBEH$ có $\angle BOE = \angle BHE$ mà hai góc có đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh BE nên tứ giác $OBEH$ là tứ giác nội tiếp.

4

- (c) Ta có $\angle BOE = \angle AFE$ nên $\angle BOE = \angle DFE$ nên tứ giác $ODFE$ nội tiếp (góc ngoài tại O bằng góc trong tại F).

Có tứ giác $ODFE$ nội tiếp nên $\angle ODE = \angle OFE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OE), mà $OE = OF$ (vì E, F thuộc (O)) nên tam giác OEF cân tại O nên $\angle OEF = \angle OFE$. Suy ra $\angle ODE = \angle OEF$.

Xét $\triangle ODE$ và $\triangle OES$ có $\angle E$ chung, $\angle ODE = \angle OES$ nên $\triangle ODE \sim \triangle OES$ (g.g).

Suy ra $\frac{OE}{OS} = \frac{OD}{OE}$ (tỷ lệ tương ứng), mà $OE = OC$ (vì C, E thuộc (O)) nên $\frac{OC}{OS} = \frac{OD}{OC}$.

Xét $\triangle ODC$ và $\triangle OCS$ có $\angle O$ chung, $\frac{OC}{OS} = \frac{OD}{OC}$ nên $\triangle ODC \sim \triangle OCS$ (c.g.c). Suy ra $\angle OCS = \angle ODC$.

Tương tự câu (a) ta có tam giác CBD vuông tại D nên $\angle BDC = 90^\circ$. Mà $ABCD$ là hình bình hành và O là trung điểm AC nên O là trung điểm BD , dẫn đến $\angle ODC = 90^\circ$.

Ta suy ra $\angle OCS = 90^\circ$ hay CS là tiếp tuyến của (O) .

Bài 4 (1.0 điểm). Tồn tại hay không hai số nguyên a, b thỏa mãn

$$(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}?$$

Lời giải. Giả sử tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn

$$(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}.$$

Ta có $a^2 + 2023b^2 + 2ab\sqrt{2023} = 2024 + 2023\sqrt{2023}$, hay $a^2 + 2023b^2 - 2024 = (2023 - 2ab)\sqrt{2023}$. Vì a, b là các số nguyên nên $2ab$ là số chẵn, suy ra $2023 - 2ab$ là số lẻ. Vì thế $2023 - 2ab \neq 0$, từ đó ta có $\sqrt{2023} = \frac{a^2 + 2023b^2 - 2024}{2023 - 2ab}$ là số hữu tỉ, mâu thuẫn vì $\sqrt{2023}$ là số vô tỉ.

Vậy không tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn đề bài.

Bài 5 (1.0 điểm). Trên bảng ta viết đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Ta viết lên bảng đa thức mới $P_1(x) = \frac{P(x+1) + P(x-1)}{2}$ rồi xóa đi đa thức $P(x)$.

Ta viết lên bảng đa thức mới $P_2(x) = \frac{P_1(x+1) + P_1(x-1)}{2}$ rồi xóa đi đa thức $P_1(x)$.

Ta cứ tiếp tục làm như thế nhiều lần. Chứng minh rằng nếu cứ làm như vậy nhiều lần thì đến một lúc nào đó ta nhận được một đa thức không có nghiệm.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{P(x+1) + P(x-1)}{2} \\ &= \frac{a(x+1)^2 + a(x-1)^2}{2} + \frac{b(x+1) + b(x-1)}{2} + c \\ &= ax^2 + bx + c + a \\ &= P(x) + a. \end{aligned}$$

Từ kết quả trên, bằng phương pháp quy nạp ta thấy $P_n(x) = P(x) + na = ax^2 + bx + (c + na)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Ta tính được $\Delta_n = b^2 - 4a(c + na)$ của đa thức $P_n(x)$.

Chọn số nguyên dương n lớn hơn $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ ta được $\Delta_n < 0$, dẫn đến thu được 1 đa thức không có nghiệm.