

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức sau: $P = \frac{1}{100} - \frac{1}{100.99} - \frac{1}{99.98} - \frac{1}{98.97} - \dots - \frac{1}{3.2} - \frac{1}{2.1}$

2) Thực hiện phép tính sau: $A = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot 5^7 + \left(\frac{9}{4}\right)^3 : \left(\frac{3}{16}\right)^3}{2^7 \cdot 5^2 + 512}$

3) Tìm độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 13cm. Biết độ dài ba đường cao tương ứng lần lượt là 2cm; 3cm; 4cm.

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Giải các phương trình sau:

a) $|x^2 + |x - 1|| = x^2 + 2$

b) $(x + 2)^{n+1} = (x + 2)^{n+11}$ (với n là số tự nhiên)

2) Cho đa thức $f(x) = 2016x^4 - 32(25k + 2)x^2 + k^2 - 100$ (với k là số thực dương cho trước). Biết đa thức $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt a, b, c (với $a < b < c$). Tính hiệu của $a - c$.

Câu 3. (3,0 điểm)

Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc 5m/s, trên cạnh thứ ba với vận tốc 4m/s, trên cạnh thứ tư với vận tốc 3m/s. Tính độ dài cạnh của hình vuông, biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên bốn cạnh là 59 giây.

Câu 4. (3,0 điểm)

1) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$ (với x là số nguyên).

2) Tìm số tự nhiên n và chữ số a biết rằng: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \overline{aaa}$

3) Chứng tỏ rằng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ không là số tự nhiên với mọi $n \in \mathbb{N}$

Câu 5. (5,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, K là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia KA lấy D sao cho KD = KA.

a) Chứng minh: $CD \parallel AB$.

b) Gọi H là trung điểm của AC; BH cắt AD tại M; DH cắt BC tại N. Chứng minh rằng: $\triangle ABH = \triangle CDH$.

c) Chứng minh: $\triangle HMN$ cân.

2. Cho tam giác ABC có góc A tù. Kẻ $AD \perp AB$ và $AD = AB$ (tia AD nằm giữa hai tia AB và AC). Kẻ $AE \perp AC$ và $AE = AC$ (tia AE nằm giữa hai tia AB và AC). Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $AM \perp DE$.

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho 5 số dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.