

**Câu 1. (4.0 điểm).**

1. Tính giá trị của các biểu thức sau (tính hợp lý nếu có thể)

a)  $A = \sqrt{25} + (2^2 \cdot 3)^2 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + 2024^0 + \left|-\frac{1}{4}\right|$

b)  $B = \frac{1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 7.21.35}$

c)  $C = \frac{2a}{5b} + \frac{5b}{6c} + \frac{6c}{7d} + \frac{7d}{2a}$ , biết  $\frac{2a}{5b} = \frac{5b}{6c} = \frac{6c}{7d} = \frac{7d}{2a}$  và  $a, b, c, d \neq 0$

**Câu 2. (4.0 điểm)**

a) Tìm x, biết  $|2x+3| + |2x-1| = \frac{8}{5(x+1)^2 + 2}$

b) Bốn bao gạo có tổng cộng 375kg. Lần thứ nhất người ta lấy đi 1kg ở bao thứ nhất; 2kg ở bao thứ hai; 3kg ở bao thứ ba; 4kg ở bao thứ tư. Lần thứ hai người ta lấy đi tiếp  $\frac{1}{5}$  số kg gạo còn lại của bao thứ nhất;  $\frac{1}{4}$  số kg gạo còn lại của bao thứ hai;  $\frac{1}{3}$  số kg gạo còn lại của bao thứ ba;  $\frac{1}{2}$  số kg gạo còn lại của bao thứ tư thì số kg gạo còn lại sau lần lấy thứ hai của bốn bao bằng nhau. Tìm số kg gạo mỗi bao lúc đầu.

**Câu 3. (4.0 điểm)**

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x ; y) thỏa mãn:  $x + y - 2xy = 4$

b) Tìm số nguyên tố  $\overline{ab}$  ( $a > b > 0$ ), biết  $\overline{ab} - \overline{ba}$  là số chính phương.

**Câu 4. (6.0 điểm)** Cho  $\triangle ABC$  có ba góc nhọn,  $AB < AC$ , trung tuyến  $AM$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AB$  chứa điểm  $C$ , vẽ đoạn thẳng  $AE$  vuông góc với  $AB$  và  $AE = AB$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $AC$  chứa điểm  $B$ , vẽ đoạn thẳng  $AD$  vuông góc với  $AC$  và  $AD = AC$ .

1. Chứng minh:  $BD = CE$

2. Trên tia đối của tia  $MA$  lấy  $N$  sao cho  $MN = MA$ . Chứng minh:

$$\widehat{ACN} = 180^\circ - \widehat{BAC} \text{ và } \triangle ADE = \triangle CAN.$$

3. Gọi giao điểm của  $DE$  với  $AB$ ,  $AC$  lần lượt là  $Q$ ,  $P$ . Chứng minh:  $AP < AQ$

**Câu 5. (2 điểm)** Cho  $P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4034}$  và  $Q = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4033}$

Chứng tỏ rằng:  $\frac{P}{Q} < 1\frac{2017}{2018}$

.....Hết.....

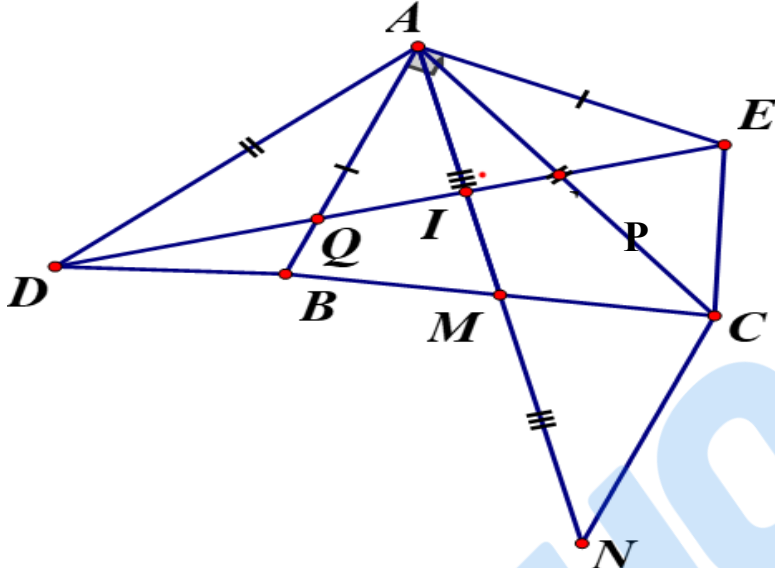
# HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC 2023 - 2024

MÔN: TOÁN - LỚP 7

| Câu        | ĐÁP ÁN                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Điểm |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1.(4 điểm) | <p>a) <math>A = \sqrt{25} + (2^2 \cdot 3)^2 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + 2024^0 + \left -\frac{1}{4}\right </math></p> $= 5 + 2^4 \cdot 3^2 \cdot \left(\frac{-1}{2^2}\right) + 1 + \frac{1}{4}$ $= 5 - 36 + 1 + \frac{1}{4}$ $= \frac{-119}{4}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,5  |
|            | <p>b) <math>B = \frac{1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21}{1.3.5 + 2.6.10 + 4.12.20 + 7.21.35}</math></p> $= \frac{1.2.3(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)}{1.3.5(1 + 2.2.2 + 4.4.4 + 7.7.7)}$ $= \frac{1.2.3}{1.3.5}$ $= \frac{2}{5}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,5  |
|            | <p>c) <math>C = \frac{2a}{5b} + \frac{5b}{6c} + \frac{6c}{7d} + \frac{7d}{2a}</math>, biết <math>\frac{2a}{5b} = \frac{5b}{6c} = \frac{6c}{7d} = \frac{7d}{2a}</math> và <math>a, b, c, d \neq 0</math></p> <p>Đặt <math>\frac{2a}{5b} = \frac{5b}{6c} = \frac{6c}{7d} = \frac{7d}{2a} = k \Rightarrow \frac{2a}{5b} \cdot \frac{5b}{6c} \cdot \frac{6c}{7d} \cdot \frac{7d}{2a} = k^4 \Rightarrow k = \pm 1 \Rightarrow C = \pm 4</math></p>                                                                                                                                                                                           | 1,0  |
| 2.(4 điểm) | <p>a) Tìm x, biết <math> 2x+3  +  2x-1  = \frac{8}{5(x+1)^2 + 2}</math></p> <p>Ta có <math> 2x+3  +  2x-1  =  2x+3  +  1-2x  \geq  2x+3+1-2x  =  4  = 4</math> với mọi x</p> <p>Dấu '=' xảy ra khi <math>(2x+3)(1-2x) \geq 0 \Rightarrow \frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}</math></p> <p>Lại có <math>5(x+1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{8}{5(x+1)^2 + 2} \leq \frac{8}{2} = 4</math> với mọi x</p> <p>Dấu '=' xảy ra khi x = -1</p> <p>Do đó <math> 2x+3  +  2x-1  = \frac{8}{5(x+1)^2 + 2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = -1</math></p> <p>Vậy x = -1</p> | 0,5  |
|            | <p>b) Bốn bao gạo có tổng cộng 375kg. Lần thứ nhất người ta lấy đi 1kg ở bao thứ nhất; 2kg ở bao thứ hai; 3kg ở bao thứ ba; 4kg ở bao thứ tư. Lần thứ hai người ta lấy đi tiếp <math>\frac{1}{5}</math> số kg gạo còn lại của bao thứ nhất; <math>\frac{1}{4}</math> số kg gạo còn lại của bao thứ hai; <math>\frac{1}{3}</math> số kg gạo còn lại của bao thứ ba; <math>\frac{1}{2}</math> số kg gạo còn lại của bao thứ tư thì số kg gạo còn lại sau lần lấy thứ hai của bốn</p>                                                                                                                                                      | 0,5  |

|               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                     |          |          |    |    |          |   |   |    |    |     |   |   |   |    |     |    |   |   |   |  |          |          |          |          |                                      |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------|----------|----|----|----------|---|---|----|----|-----|---|---|---|----|-----|----|---|---|---|--|----------|----------|----------|----------|--------------------------------------|
|               | <p>bao bằng nhau. Tìm số kg gạo mỗi bao lúc đầu.</p> <p>Gọi số kg gạo 4 bao lúc đầu lần lượt là: <math>x + 1; y + 2; z + 3; t + 4</math> (kg)<br/>Với <math>x, y, z, t &gt; 0</math><br/>Sau khi lấy đi lần thứ nhất thì số kg gạo mỗi bao còn lại lần lượt là <math>x, y, z, t</math> (kg) và tổng số kg gạo còn lại của 4 bao là <math>375 - (1+2+3+4) = 365</math> (kg)<br/>nên <math>x + y + z + t = 365</math><br/>Sau khi lấy đi lần thứ hai thì số kg gạo mỗi bao còn lại lần lượt là:<br/><math>\frac{4}{5}x; \frac{3}{4}y; \frac{2}{3}z; \frac{1}{2}t</math><br/>Ta có <math>\frac{4x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{2z}{3} = \frac{t}{2} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{16} = \frac{z}{18} = \frac{t}{24}</math><br/>Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có<br/><math>\frac{x}{15} = \frac{y}{16} = \frac{z}{18} = \frac{t}{24} = \frac{x+y+z+t}{15+16+18+24} = \frac{365}{73} = 5</math><br/>Suy ra <math>x = 5.15 = 75; y = 5.16 = 80; z = 5.18 = 90; t = 5.24 = 120</math><br/>Vậy số kg gạo mỗi bao lúc đầu lần lượt là: 76; 82; 93; 124 (kg)</p>                                                                                                              | 0,25<br>0,25<br>0,25<br>0,25<br>0,25<br>0,25<br>0,5 |          |          |    |    |          |   |   |    |    |     |   |   |   |    |     |    |   |   |   |  |          |          |          |          |                                      |
| 3<br>(4 điểm) | <p>a) Tìm tất cả các cặp số nguyên <math>(x; y)</math> thỏa mãn: <math>x + y - 2xy = 4</math><br/>Ta có: <math>x + y - 2xy = 4</math> suy ra <math>x - 2xy + y - 4 = 0</math><br/><math>\Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4xy + 2y - 1 = 7</math><br/><math>\Leftrightarrow 2x(1 - 2y) - (1 - 2y) = 7 \Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 7</math><br/>Lập bảng</p> <table><tr><td><math>2x - 1</math></td><td>1</td><td>7</td><td>-1</td><td>-7</td></tr><tr><td><math>1 - 2y</math></td><td>7</td><td>1</td><td>-7</td><td>-1</td></tr><tr><td><math>x</math></td><td>1</td><td>4</td><td>0</td><td>-3</td></tr><tr><td><math>y</math></td><td>-3</td><td>0</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>Thỏa mãn</td><td>Thỏa mãn</td><td>Thỏa mãn</td><td>Thỏa mãn</td></tr></table> <p>Vậy <math>(x; y)</math> cần tìm là <math>(1; -3); (4; 0); (0; 4); (-3; 1)</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                          | $2x - 1$                                            | 1        | 7        | -1 | -7 | $1 - 2y$ | 7 | 1 | -7 | -1 | $x$ | 1 | 4 | 0 | -3 | $y$ | -3 | 0 | 4 | 1 |  | Thỏa mãn | Thỏa mãn | Thỏa mãn | Thỏa mãn | 0,5<br><br>0,5<br><br>0,5<br><br>0,5 |
| $2x - 1$      | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 7                                                   | -1       | -7       |    |    |          |   |   |    |    |     |   |   |   |    |     |    |   |   |   |  |          |          |          |          |                                      |
| $1 - 2y$      | 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 1                                                   | -7       | -1       |    |    |          |   |   |    |    |     |   |   |   |    |     |    |   |   |   |  |          |          |          |          |                                      |
| $x$           | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 4                                                   | 0        | -3       |    |    |          |   |   |    |    |     |   |   |   |    |     |    |   |   |   |  |          |          |          |          |                                      |
| $y$           | -3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0                                                   | 4        | 1        |    |    |          |   |   |    |    |     |   |   |   |    |     |    |   |   |   |  |          |          |          |          |                                      |
|               | Thỏa mãn                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Thỏa mãn                                            | Thỏa mãn | Thỏa mãn |    |    |          |   |   |    |    |     |   |   |   |    |     |    |   |   |   |  |          |          |          |          |                                      |
|               | <p>b) Tìm số nguyên tố <math>\overline{ab}</math> (<math>a &gt; b &gt; 0</math>), biết <math>\overline{ab} - \overline{ba}</math> là số chính phương.<br/>Ta có:<br/><math>\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a</math><br/><math>\Rightarrow \overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b)</math><br/><math>\Rightarrow \overline{ab} - \overline{ba} = 3^2(a - b)</math><br/><math>\overline{ab} - \overline{ba}</math> là số chính phương khi <math>(a - b)</math> là số chính phương<br/>Do <math>a, b</math> là các chữ số và <math>0 &lt; a, b \leq 9, a &gt; b &gt; 0</math> nên <math>0 \leq a - b \leq 8</math><br/>Suy ra <math>(a - b)</math> là SCP khi <math>a - b = 1</math> hoặc <math>a - b = 4</math><br/>+ Nếu <math>a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}</math><br/>Mà <math>\overline{ab}</math> là số nguyên tố nên <math>\overline{ab} = 43</math> thỏa mãn.<br/>+ Nếu <math>a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51, 62, 73, 84, 95\}</math> mà <math>\overline{ab}</math> là số nguyên tố <math>\overline{ab} = 73</math><br/>Vậy <math>\overline{ab} = 43</math> và <math>\overline{ab} = 73</math></p> | 0,25<br>0,25<br>0,5<br>0,5<br>0,5                   |          |          |    |    |          |   |   |    |    |     |   |   |   |    |     |    |   |   |   |  |          |          |          |          |                                      |

|                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |     |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Bài 4<br>(6 điểm) | <p>Cho <math>\triangle ABC</math> có ba góc nhọn, <math>AB &lt; AC</math>, trung tuyến <math>AM</math>. Trên nửa mặt phẳng bờ <math>AB</math> chứa điểm <math>C</math>, vẽ đoạn thẳng <math>AE</math> vuông góc với <math>AB</math> và <math>AE = AB</math>. Trên nửa mặt phẳng bờ <math>AC</math> chứa điểm <math>B</math>, vẽ đoạn thẳng <math>AD</math> vuông góc với <math>AC</math> và <math>AD = AC</math>.</p> <p>1. Chứng minh: <math>BD = CE</math></p> <p>2. Trên tia đối của tia <math>MA</math> lấy <math>N</math> sao cho <math>MN = MA</math>.</p> <p>Chứng minh: <math>\widehat{ACN} = 180^\circ - \widehat{BAC}</math> và <math>\triangle ADE = \triangle CAN</math>.</p> <p>3. Gọi giao điểm của <math>DE</math> với <math>AB</math>, <math>AC</math> lần lượt là <math>Q</math>, <math>P</math>.</p> <p>Chứng minh: <math>AP &lt; AQ</math></p>                                                              |     |
|                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|                   | <p>1. Xét <math>\triangle ABD</math> và <math>\triangle AEC</math> có: <math>AD = AC(gt)</math> và <math>AE = AB(gt)</math>; <math>\widehat{BAD} = \widehat{CAE}</math> (cùng phụ với <math>\widehat{BAC}</math>)<br/> <math>\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AEC(c.g.c) \Rightarrow BD = CE</math> (2 cạnh tương ứng)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 2,0 |
|                   | <p>2) Xét <math>\triangle ABM</math> và <math>\triangle NCM</math> có:<br/> <math>AM = MN(gt)</math>; <math>BM = CM(gt)</math>; <math>\widehat{AMB} = \widehat{NMC}</math> (đ đ)<br/> <math>\Rightarrow \triangle ABM = \triangle NCM(c.g.c) \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{NCM}</math> (hai góc tương ứng)<br/>         Do đó: <math>\widehat{ACN} = \widehat{ACB} + \widehat{BCN} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAC}</math> (đpcm)<br/>         + Ta có: <math>\widehat{DAE} = \widehat{DAC} + \widehat{BAE} - \widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{ACN}</math><br/>         Xét <math>\triangle ADE</math> và <math>\triangle ACN</math> có: <math>CN = AE</math> (cùng bằng <math>AB</math>),<br/> <math>AC = AD(gt)</math>; <math>\widehat{DAE} = \widehat{ACN}(cmt)</math><br/> <math>\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CAN(cgc)</math></p> | 2,0 |
|                   | <p>3) Theo tính chất góc ngoài, ta có: <math>\widehat{AQP} = \widehat{QAD} + \widehat{QDA}</math>; <math>\widehat{APQ} = \widehat{PAE} + \widehat{PEA}</math><br/>         Mà <math>AB &lt; AC</math> nên <math>AE &lt; AD \Rightarrow \widehat{ADE} &lt; \widehat{AED}</math><br/>         Theo chứng minh trên ta có: <math>\widehat{QAD} = \widehat{PAE}</math><br/>         Từ đó suy ra <math>\widehat{QAD} + \widehat{QDA} &lt; \widehat{PAE} + \widehat{PEA}</math><br/>         Hay <math>\widehat{AQP} &lt; \widehat{APQ} \Rightarrow AP &lt; AQ</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2,0 |

