

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn kiểm tra: Toán
Ngày thi: 12/09/2023
Thời gian làm bài: 90 phút
(Không tính thời gian phát đề)

Bài 1. (6,0 điểm)

1. Cho biểu thức $M = 1 - 2^1 + 2^2 - 2^3 + \dots - 2^{2023} + 2^{2024}$.

Chứng minh rằng $M = \frac{1 + 2^{2025}}{3}$.

2. Tìm x biết $|x + 1| + |x + 2| = 3x$.

Bài 2. (3,0 điểm)

Cho đa thức $f(x) = ax + b$, với a, b là các số nguyên, $a \neq 0$. Biết giá trị của đa thức tại $x = 1$ và $x = 3$ tỉ lệ với 2 và -2 . Chứng minh rằng b chia hết cho a .

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Chứng minh rằng $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$.

2. Tìm các số hữu tỉ dương x, y thỏa mãn $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ là một lũy thừa của 2.

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH ($H \in BC$). Dựng $HM \perp AB$ tại M , $HN \perp AC$ tại N . Gọi I là giao điểm của AH với MN .

1. Chứng minh rằng $\triangle AMH = \triangle HNA$ và $IM = IN$.

2. Gọi O là trung điểm của BC , Q là giao điểm của HN và OA . Chứng minh rằng $\triangle ANQ = \triangle HMB$ và $BQ \parallel MN$.

3. Gọi J là giao điểm của BQ và AH . Chứng minh rằng $\widehat{BJO} = \widehat{MNC}$.

Bài 5. (1,0 điểm)

Khi trên bảng ghi 2023 số tự nhiên $1, 2, 3, \dots, 2023$, cần xóa đi ít nhất bao nhiêu số để các số còn lại trên bảng có tính chất không có 3 số nào mà một trong 3 số đó bằng tích của 2 số còn lại.

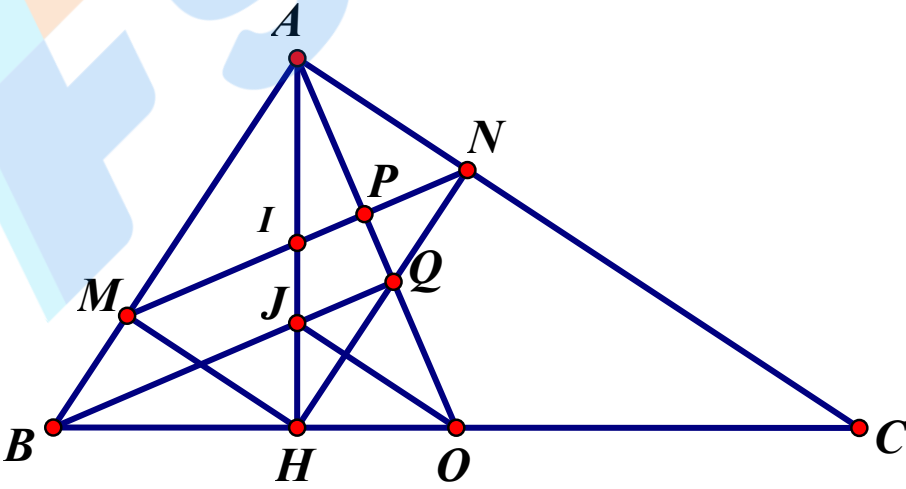
-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn kiểm tra: Toán
Ngày thi: 12/09/2023
Thời gian làm bài: 90 phút
(Không tính thời gian phát đề)

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
1	1	Cho biểu thức $M = 1 - 2^1 + 2^2 - 2^3 + \dots - 2^{2023} + 2^{2024}$. Chứng minh rằng $M = \frac{1 + 2^{2025}}{3}$.	3,0
		$M = 1 - 2^1 + 2^2 - 2^3 + \dots - 2^{2023} + 2^{2024}$ $\Rightarrow 2M = 2^1 - 2^2 + 2^3 - \dots - 2^{2024} + 2^{2025}$	1,5
		$\Rightarrow M + 2M = 1 + 2^{2025}$	1,0
		$\Rightarrow M = \frac{1 + 2^{2025}}{3}$	0,5
	2	Tìm x biết $ x + 1 + x + 2 = 3x$.	3,0
		VT > 0 $\Rightarrow$ VP > 0 $\Rightarrow x > 0$	1,0
		$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \Rightarrow x + 1 = x + 1 \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x + 2 = x + 2 \end{cases}$	1,0
		$\Rightarrow x + 1 + x + 2 = 3x$	0,5
		$x = 3$	0,5
	1	Cho đa thức $f(x) = ax + b$, với a, b là các số nguyên, $a \neq 0$. Biết giá trị của đa thức tại $x = 1$ và $x = 3$ tỉ lệ với 2 và -2. Chứng minh rằng b chia hết cho a .	2,0
		$f(1) = a + b, f(3) = 3a + b$	0,5
		$\frac{a + b}{2} = \frac{3a + b}{-2} = \frac{-2a}{4} = \frac{-a}{2}$	1,0
		$\Rightarrow a + b = -a \Rightarrow b = -2a$	0,5
		Do a, b là các số nguyên, $a \neq 0 \Rightarrow b$ chia hết cho a .	
3	1	Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$	2,0
		$A = \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} \right) < \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} \right)$ $\Rightarrow A < \frac{1}{4} \left(1 + 1 - \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{400} < \frac{1}{2}$	1,0 1,0

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
	2	Tìm các số hữu tỉ dương x, y thỏa mãn $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ là một lũy thừa của 2.	2,0
		Có $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ với a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $(a; b) = (c; d) = 1$. Khi đó, biểu thức đã cho viết lại thành $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)}{abcd}.$	0,5
		Từ yêu cầu bài toán ta có $cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)$ chia hết cho $abcd$. Suy ra $cd(a^2 + b^2)$ chia hết cho ab. Từ $(a; b) = 1 \Rightarrow (a^2 + b^2, ab) = 1 \Rightarrow cd$ chia hết cho ab. Hoàn toàn tương tự có ab chia hết cho cd. Suy ra $ab = cd$. Khi đó $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{ab}.$	0,5
		Gọi n là số tự nhiên mà $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2^n$. Ta có $2^n \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 2\sqrt{y \cdot \frac{1}{y}} = 4 \Rightarrow n \geq 2.$ Mặt khác có $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2^n ab$. Nếu $n \geq 3 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ chia hết cho 8. Từ tính chất số chính phương khi chia cho 8, ta suy ra cả 4 số a, b, c, d đều là số chẵn. Điều này mâu thuẫn với $(a; b) = (c; d) = 1$. Do đó $n = 2$.	0,5
		Khi đó $x = \frac{1}{x} > 0, y = \frac{1}{y} > 0 \Rightarrow x = y = 1$.	0,5
4	1		
		Vì $HM \perp AB, AB \perp AC$ suy ra $HM \parallel AC$ (từ vuông góc đến song song) dẫn đến $\widehat{MHA} = \widehat{NAH}$ (hai góc so le trong)	2,0

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
5		Xét tam giác $\triangle AMH$ và $\triangle HNA$ ta có: $\widehat{AMH} = \widehat{HNA} = 90^\circ$ (giả thiết), AH chung và $\widehat{MHA} = \widehat{NAH}$. Suy ra $\triangle AMH = \triangle HNA$ (cạnh huyền, góc nhọn) dẫn đến $AN = HM$ (Cạnh tương ứng).	1,0
		Ta cũng có: $\widehat{IMH} = \widehat{INA}$ (hai góc so le trong) suy ra $\triangle AIN = \triangle HIM$ (g.c.g) dẫn đến $IN = IM$ (cạnh tương ứng).	
	2	Vì O là trung điểm của BC và tam giác ABC vuông tại A nên $OA = OB = OC$ suy ra tam giác AOC cân tại O nên $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$ hay $\widehat{QAN} = \widehat{OCA}$, lại có: $\widehat{OCA} = \widehat{BHM}$ (đồng vị) suy ra $\widehat{QAN} = \widehat{BHM}$.	0,5
		Xét $\triangle ANQ$ và $\triangle HMB$, ta có $\widehat{ANQ} = \widehat{HMB} = 90^\circ$, $AN = HM$, $\widehat{QAN} = \widehat{BHM}$ nên $\triangle ANQ = \triangle HMB$ (Cạnh góc vuông, góc nhọn) nên $NQ = MB$.	1,0
		Tam giác $\triangle MNQ$ và $\triangle QBM$ có MN chung, $NQ = MB$, $\widehat{MQN} = \widehat{QMB}$ nên $\triangle MNQ = \triangle QBM$ (c.g.c) dẫn đến $\widehat{QMN} = \widehat{MQB} \Rightarrow BQ \parallel MN$.	0,5
	3	Từ câu a suy ra $IA = IH, IM = IN$ mà $\triangle AMH = \triangle MAN$ (c.g.c) nên $AH = MN$ suy ra $\widehat{INA} = \widehat{IAN} = \widehat{IHM} = 90^\circ - \widehat{MHB} = 90^\circ - \widehat{ACO} = 90^\circ - \widehat{OAC} \Leftrightarrow \widehat{INA} + \widehat{OAC} = 90^\circ$ hay $OA \perp MN$. Kết hợp với $QB \parallel MN$ suy ra $BQ \perp AO$.	0,5
		Tam giác ABO có $AH \perp BO$, $BQ \perp AO$, J là giao điểm của AH và BQ nên J là trực tâm của tam giác, dẫn đến $OJ \perp AB$ mà $AC \perp AB$ suy ra $OJ \parallel AC$. Từ đó suy ra $\widehat{BJO} = \widehat{MNC}$.	0,5
5		Khi trên bảng ghi 2023 số tự nhiên 1, 2, 3, ..., 2023, cần xóa đi ít nhất bao nhiêu số để các số còn lại trên bảng có tính chất không có 3 số nào mà một trong 3 số đó bằng tích của 2 số còn lại.	1,0
		Nếu xóa 43 số 2, 3, 4, ..., 44 thì các số còn lại là 1, 45, 46, 47, ..., 2023 vì xét 1 số bằng tích của 2 số khác nên ta không cần xét số 1	0,5
		khi đó tích của 2 số khác 1 trong phần còn lại nhỏ nhất $= 45 \cdot 46 = 2070$ nên chắc chắn không có số nào bằng tích của 2 số khác.	0,5