

Câu 1: (4,0 điểm) Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+1}{3x^2+3x} + \frac{1-2x}{6x^2-3x} - 1 \right) : \frac{1-x}{2x}$

- Rút gọn biểu thức P .
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên.
- Tìm x để $P \leq 1$.

Câu 2 (4,0 điểm):

- Giải phương trình sau: $\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$
- Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $5x^2 - xy - 2y = 17$

Câu 3 (4,0 điểm):

- Cho $a + b + c = 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng nếu $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ thì $xy + yz + xz = 0$.

- Cho $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ (với $n \in \mathbb{N}, n > 1$). Chứng minh A không phải là số chính phương.

- Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$.

Câu 4 (6,0 điểm): Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$). Gọi O là giao điểm của AC với BD và I là giao điểm của DA với CB . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

- Chứng minh: $\frac{OA+OB}{OC+OD} = \frac{IA+IB}{IC+ID}$.

- Chứng minh: Bốn điểm $I; O; M; N$ thẳng hàng.

- Giả sử $3AB = CD$ và diện tích hình thang $ABCD$ bằng S . Hãy tính diện tích tứ giác $IAOB$ theo S .

Câu 5 (2,0 điểm): Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Câu	Nội dung	Điểm
1 (4,0đ)	a. ĐKXĐ: $x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \pm 1$.	0,5
	Ta có: $P = \left(\frac{x+1}{3x^2+3x} + \frac{1-2x}{6x^2-3x} - 1 \right) : \frac{1-x}{2x}$	0,5
	$= \left(\frac{x+1}{3x(x+1)} - \frac{2x-1}{3x(2x-1)} - 1 \right) : \frac{-(x-1)}{2x}$	0,5
	$= \left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{3x} - 1 \right) \cdot \frac{-2x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$	0,5
	Vậy với $x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \pm 1$ ta có $P = \frac{2x}{x-1}$.	
	b. Ta có: $P = 2 + \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z}$	0,5
	$\Leftrightarrow x-1 \in U(2)$ mà $U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$.	0,5
	Từ đó suy ra $x \in \{-1; 0; 2; 3\}$.	0,25
	Kết hợp với ĐKXĐ được $x \in \{2; 3\}$.	0,25
	c. $P \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \leq 0$	0,5
	Mà $x-1 < x+1$ nên $x-1 < 0$ và $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x < 1$ và $x \geq -1$	0,5
	Kết hợp với ĐKXĐ được $-1 < x < 1$ và $x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}$.	0,25
Câu 2. (4 điểm)	a)	0,5
	$\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+3} = \frac{6}{x^2-2x+4}$	
	Đặt $t = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$. Với $t \geq 2$	
	Phương trình đã cho trở thành:	
	$\frac{1}{t-1} + \frac{2}{t} = \frac{6}{t+1} \Rightarrow 3t^2 - 7t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$	0,5
	Kết hợp với ĐK ta được $t = 2$	
	Do đó ta có: $(x-1)^2 + 2 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$	0,5
	Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$	0,5
	b) $5x^2 - xy - 2y = 17$	
	$\Rightarrow y(x+2) = 5x^2 - 17 \Rightarrow$	
	$y = \frac{5x^2-17}{x+2} = \frac{5x(x+2)-10(x+2)+3}{x+2} = 5x-10+\frac{3}{x+2}$	0,5
	x, y nguyên suy ra $x+2$ là ước của 3 $\Rightarrow x+2 \in \{-1, 1, -3, 3\}$	0,5
	Từ đó tìm được các cặp $(x, y) = (-3, -28); (-1, -12); (-5, -36); (1, -4)$	1
	a) Từ $a + b + c = 1$ Bình phương hai vế suy ra $ab + bc + ca = 0$	0,5

Câu 3. (4 điểm)	Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \Rightarrow x = ka, y = kb, z = kc$	0,5
	$\Rightarrow xy + yz + xz = k^2(ab + bc + ca) = 0.$	0,5
	b) Biến đổi $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2(n^4 - n^2 + 2n + 2) = \dots = n^2(n+1)^2 \cdot (n^2 - 2n + 2)$ với $n \in \mathbb{N}, n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$ và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$ (vì $n-1 > 0$) Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương $\Rightarrow A$ không là số chính phương	0,5 0,5 0,5
	c) $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} = 51 \cdot 5^n + 8 \cdot 64^n = (59-8) \cdot 5^n + 8 \cdot 64^n = 59 \cdot 5^n + 8(64^n - 5^n)$ Vì $(64^n - 5^n) : (64-5)$ nên ta có điều phải chứng minh	

Câu 4:

a) Chứng minh: $\frac{OA+OB}{OC+OD} = \frac{IA+IB}{IC+ID}.$

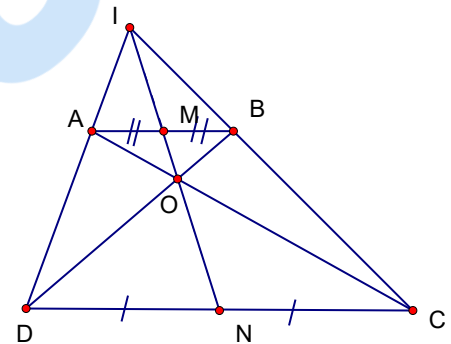
Chứng minh được: $\triangle OAB$ đồng dạng với $\triangle OCD$ (g-g)

Suy ra $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA+OB}{OC+OD}$ (1)

Chứng minh được: $\triangle IAB$ đồng dạng với $\triangle IDC$ (g-g)

Suy ra $\frac{AB}{CD} = \frac{IA}{ID} = \frac{IB}{IC} = \frac{IA+IB}{ID+IC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OA+OB}{OC+OD} = \frac{IA+IB}{IC+ID}$



b) Chứng minh: Bốn điểm $I; O; M; N$ thẳng hàng.

Ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow \frac{AM}{CN} = \frac{OA}{OC}$ (3) và $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ (vì $AB \parallel CD$, so le trong) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\triangle OAM$ đồng dạng với $\triangle OCN$ (c-g-c)

Do đó $\widehat{AOM} = \widehat{CON}$. Suy ra M, O, N thẳng hàng (*)

Ta lại có: $\frac{AB}{CD} = \frac{IA}{ID} \Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{IA}{ID}$ (5) và $\widehat{I}$ chung (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\triangle IAM$ đồng dạng với $\triangle IDN$ (c-g-c)

Do đó $\widehat{AMI} = \widehat{DNI}$. Suy ra M, I, N thẳng hàng (**)

Từ (*) và (**) suy ra bốn điểm $I; O; M; N$ thẳng hàng.

c) Giả sử $3AB = CD$ và diện tích hình thang $ABCD$ bằng S . Hãy tính diện tích tứ giác $IAOB$ theo S

Ta có $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{AOB} + S_{AOD}} = \frac{1}{1+3} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{ABD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{4} S_{ABD}$

Ta lại có $\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABD} + S_{BDC}} = \frac{1}{1+3} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{ABD} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$

Do đó $S_{AOB} = \frac{1}{16} S_{ABCD} = \frac{1}{16} S(7)$

Mặt khác $\frac{S_{IAB}}{S_{ICD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{S_{IAB}}{S_{ICD} - S_{IAB}} = \frac{1}{9-1} \Rightarrow \frac{S_{IAB}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8} \Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{8} S_{ABCD} = \frac{1}{8} S(8)$

Từ (7) và (8) suy ra $S_{IAOB} = S_{IAB} + S_{AOB} = \frac{1}{8} S + \frac{1}{16} S = \frac{3}{16} S$.

Câu 5.

	Kết hợp với giả thiết ta có $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$ $= a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a^3 + ab^2 \geq 2a^2b; b^3 + bc^2 \geq 2b^2c; c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$ $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) > 0$ Suy ra	0,25
	Do đó $P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$ $= a^2 + b^2 + c^2 + \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$ $= a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$	0,25
	Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$. Từ giả thiết $a + b + c = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$, do đó ta được $t \geq 3$	0,25
	Bất đẳng thức trên trở thành $t + \frac{9-t}{2t} = t + \frac{9}{2t} - \frac{1}{2} \geq 3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 4$ Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t \geq 3$. Vậy $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \geq 4$	0,25
	Suy ra $P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 4$	0,25

	dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ và giá trị nhỏ nhất của P là 4	0,25
--	---	------

