

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề thi có 01 trang

Ngày thi 09 tháng 12 năm 2023

Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1: (4,0 điểm).

a) Phân tích đa thức: $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz$ thành nhân tử.

b) Cho $a + b = x + y$ và $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$.

Chứng minh: $a^n + b^n = x^n + y^n$ (với mọi số tự nhiên n)

Bài 2: (4,0 điểm).

a) Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2 + 3ab - 11b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.

b) Tìm phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x-1)(x+2)$. Biết rằng đa thức $P(x)$ chia cho $(x-1)$ dư 7 và chia cho $(x+2)$ dư 1.

Bài 3: (4,0 điểm).

a) Tìm x biết: $(x-1)(x^2 + 3x - 7) = |x^3 - 1|$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$

Bài 4: (6,0 điểm).

1. Cho hình vuông ABCD. Vẽ tam giác AEB đều nằm trong hình vuông. Đường thẳng AE cắt BD ở F, DE cắt FC ở K. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DFE cân.

b) K là trung điểm của CF.

2. Cho tam giác IHK cân ở I đường cao IM. Trên tia đối của HM vẽ N sao cho H là trung điểm của MN. Vẽ MP vuông góc với IH. Gọi Q là trung điểm của IP. Chứng minh rằng: NP vuông góc với QM.

Bài 5: (2,0 điểm).

Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

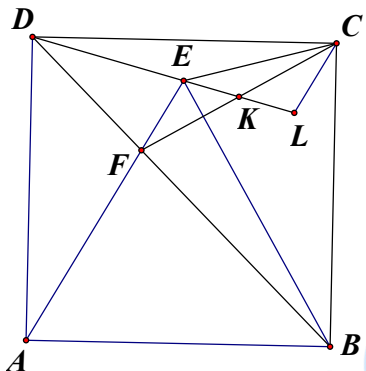
Chứng minh: $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c$

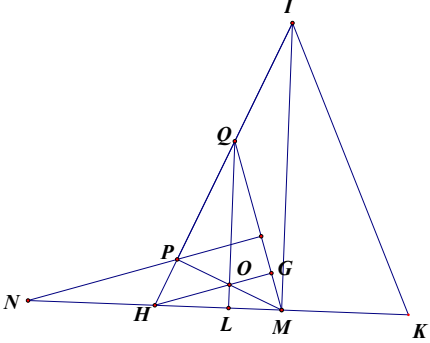
-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

2

	$\begin{cases} P(x) = Q_1(x)(x-1)(x+2) + ax + b \\ P(x) = Q_2(x)(x-1) + 7 \\ P(x) = Q_3(x)(x+2) + 1 \end{cases}$ Vì $P(1) = 7$ nên $a + b = 7$ Vì $P(-2) = 1$ nên $-2a + b = 1$ Từ đó ta được $\begin{cases} a + b = 7 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$ Vậy phần dư cần tìm là: $2x + 5$.	0,25 0,25 0,25 0,25
Bài 3 4,0đ	a) Tìm x biết: $(x-1)(x^2+3x-7) = x^3-1 $	2,0
	Vì $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$; Do $x^2+x+1 > 0 \forall x$	0,25
	Nên ta xét 2 trường hợp	
	TH1: Nếu $x \geq 1$ ta có	0,75
	$(x-1)(x^2+3x-7) = x^3-1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x-7) = (x-1)(x^2+x+1)$ $\Leftrightarrow (x-1)(2x-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2x-8=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1(\text{thỏa mãn}) \\ x=4(\text{thỏa mãn}) \end{cases}$	
	TH2: Nếu $x < 1$ ta có	0,75
	$(x-1)(x^2+3x-7) = -(x^3-1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x-7) = -(x-1)(x^2+x+1)$ $\Leftrightarrow (x-1)(2x^2+4x-6) = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+3=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1(\text{không thỏa mãn}) \\ x=-3(\text{thỏa mãn}) \end{cases}$	
	Vậy $x \in \{1; -3; 4\}$	0,25
	b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$ (1)	2,0
	Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$	
	Ta thấy $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \leq x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$	
	$x^4 + x^2 + 20 + 8x^2 = x^4 + 4x^2 + 5x^2 + 20 = (x^2+4)(x^2+5)$	0,5
	$\Leftrightarrow x^2(x^2+1) < y(y+1) \leq (x^2+4)(x^2+5)$	
	Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau	
	+ TH1: $y(y+1) = (x^2+1)(x^2+2) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$	
	Với $x^2 = 9$, ta có $y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0$	
	$\Leftrightarrow y = 10; y = -11$ (t.m)	
	+ TH2. $y(y+1) = (x^2+2)(x^2+3) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$	0,25

	$\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \text{ (loại)}$ $+ \text{ TH3. } y(y+1) = (x^2+3)(x^2+4) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \text{ (loại)}$ $+ \text{ TH4. } x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 9x^2 + 20 \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Với $x^2 = 0$, ta có $y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5; y = 4$	0,25 0,25 0,25
Bài 4.1 4,0đ	1. Cho hình vuông ABCD. Vẽ tam giác AEB đều nằm trong hình vuông. Đường thẳng AE cắt BD ở F, DE cắt FC ở K. Chứng minh rằng: a) Tam giác DFE cân. b) K là trung điểm của CF.	4,0
		
Câu 1 4,0đ	a) Ta có $\triangle ABE$ đều nên $AB = AE \Rightarrow \triangle ABE$ tại A $\Rightarrow \widehat{DAE} = 30^\circ$ $\triangle ABD$ vuông cân tại A nên $\widehat{BDA} = 45^\circ$ và $\widehat{DAF} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{DFE} = 75^\circ$ c/m $\triangle ADE$ cân tại A Suy ra $\triangle DFE$ cân tại D.	0,5 0,75 0,75
	b) Vì $\widehat{ADE} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{CDE} = 15^\circ$ Từ $\widehat{DEF} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{LEF} = 105^\circ$ Từ C đường thẳng song song với AE cắt DK ở L. Ta có $\widehat{DLC} = \widehat{FEL} = 105^\circ \Rightarrow \widehat{DCL} = 60^\circ$ Suy ra: $\triangle ABE$ đều $\widehat{EBA} = 60^\circ; \widehat{DBA} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{FBE} = 15^\circ$ $\Rightarrow \widehat{FBE} = \widehat{LDC}; DC = BE; \widehat{FEB} = \widehat{LCD}$ $\triangle FEB = \triangle LCD (g.c.g) \Rightarrow CL = EF$ Mà $CL \parallel FE \Rightarrow CEFL$ là hình bình hành $\Rightarrow CK = KF$	0,5 0,5 0,5 0,5
Bài 4.2 2,0đ	2. Cho tam giác IHK cân ở I đường cao IM. Trên tia đối của HM vẽ N sao cho H là trung điểm của MN. Vẽ MP vuông góc với IH. Gọi Q là trung điểm của IP. Chứng minh rằng: NP vuông góc với QM.	2,0

		
	2. Gọi O là trung điểm của PM $\Rightarrow$ OQ là đường trung bình của tam giác IMP $\Rightarrow$ OQ // IM $\Rightarrow$ Mà IM vuông góc với HK $\Rightarrow$ OQ vuông góc với HK $\Rightarrow$ Lại có MP vuông góc với HI $\Rightarrow$ O là trực tâm của tam giác QHM $\Rightarrow$ HO vuông góc với QM. Vì OH là đường trung bình của tam giác NMP nên OH // PN NP vuông góc với QM.	0,5 0,5 0,5 0,5
Bài 5 2,0đ	Cho các số thực a,b,c dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c$	
	Đặt $E = \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2}$ Chứng minh được bất đẳng thức $\frac{x^2}{y} + \frac{m^2}{n} \geq \frac{(x+m)^2}{y+n}$ Ta có: $E = \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} = \frac{4a^4}{2a^3+2a^2b^2} + \frac{4b^4}{2b^3+2b^2c^2} + \frac{4c^3}{2c^3+2c^2a^2}$	0,25
	Áp dụng $\frac{x^2}{y} + \frac{m^2}{n} \geq \frac{(x+m)^2}{y+n}$ ta có: $E \geq \frac{(2a^2+2b^2+2c^2)^2}{2a^3+2a^2b^2+2b^3+2b^2c^2+2c^3+2c^2a^2}$	0,25
	Vì $\frac{a^2+1}{2} \geq a$ nên $a^4+a^2 \geq 2a^3$; $\frac{b^2+1}{2} \geq b$ nên $b^4+b^2 \geq 2b^3$; $\frac{c^2+1}{2} \geq c$ nên $c^4+c^2 \geq 2c^3$	0,25
	$E \geq \frac{(2a^2+2b^2+2c^2)^2}{2a^3+2a^2b^2+2b^3+2b^2c^2+2c^3+2c^2a^2} \geq \frac{36}{a^4+a^2+2a^2b^2+b^4+b^2+2b^2c^2+c^4+c^2+2c^2a^2}$	0,25
	$E \geq \frac{36}{(a^2+b^2+c^2)^2+a^2+b^2+c^2} \Rightarrow E \geq \frac{36}{12}$	0,25
	Ta có: $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$	0,25
	Mà $a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow a+b+c \leq 3 \Rightarrow \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c$	0,25
	Vậy $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c$	0,25
	Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$	0,25