

TITLE:

Câu 1:

$$\begin{aligned} a) E &= 3\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} - \sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} \\ &= (3 - 2 + 1)\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } E = 2\sqrt{5}$$

b) Xét phương trình: $x^2 + 4x + 8 = 0$

$$\text{có } a - b + c = 0$$

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} = -3 \end{cases}$$

Vậy 2 nghiệm phân biệt của phương trình là:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$c) \text{ Cộng vế với vế ta có: } \begin{cases} 5x = 10 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$

Câu 2:

a) Với $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \\
 &= \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\
 &= \frac{(x-1)^2}{4x} \cdot \frac{x - 2\sqrt{x} + 1 - x - 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\
 &= \frac{(x-1)^2}{4x} \cdot \frac{-4\sqrt{x}}{x-1} = \frac{1-x}{\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$

b) Ta có:

$$A \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt{x}} \geq 0$$

Vì $\sqrt{x} > 0$ nên $\frac{1-x}{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Mà $x > 0$ và $x \neq 1 \Rightarrow 0 < x < 1$

Vậy $0 < x < 1$

Câu 3:

a) Để đường thẳng (d) và đường thẳng (Δ) song song với nhau thì:

$$\begin{cases} 5-m = 4m \\ -3 \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 5-m = 4m \Leftrightarrow 5m = 5 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy với $m = 1$ thì đường thẳng (d) và đường thẳng (Δ) song song với nhau.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2 = 4mx + 5 \Leftrightarrow x^2 - 4mx - 5 = 0 \quad (1)$

Do $a.c = -5 < 0$ nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2 hay (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt với mọi m.

Áp dụng hệ thức Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$$

Do x_2 là nghiệm của (1) nên $x_2^2 - 4m x_2 - 5 = 0$
 $(\Rightarrow) x_2^2 = 4m x_2 + 5$

Đề: $x_2^2 + 4m x_1 = 105$

$(\Rightarrow) 4m x_2 + 5 + 4m x_1 = 105$

$(\Rightarrow) 4m (x_1 + x_2) + 5 = 105$

$(\Rightarrow) 4m \cdot 4m = 100$

$(\Rightarrow) m^2 = \frac{25}{4}$

$(\Rightarrow) \begin{cases} m = \frac{5}{2} \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad (TM)$

Vậy với $m = \pm \frac{5}{2}$ thì đường thẳng (d) cắt (P) tại hai

điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2^2 + 4m x_1 = 105$

Câu 4:

Gọi chiều dài khu vườn là x ($x > 45$, mét)

Vì chiều rộng ngắn hơn chiều dài 45m nên chiều rộng khu vườn là $x - 45$ (m)

Chu vi khu vườn là: $2(x + x - 45) = 2(2x - 45)$

Chiều dài khu vườn khi giảm đi 2 lần là: $\frac{x}{2}$ (m)

Chiều rộng khu vườn khi tăng lên 3 lần là $3(x - 45)$ (m)

Khi đó chu vi khu vườn là:

$2\left(\frac{x}{2} + 3(x - 45)\right) = 2\left(\frac{7}{2}x - 135\right)$

Vì chu vi khu vườn không đổi nên ta có phương trình:

$$2(2x - 45) = 2\left(\frac{7}{2}x - 135\right)$$

$$(1) \quad 2x - 45 = \frac{7}{2}x - 135$$

$$(-) \frac{3}{2} x = 90$$

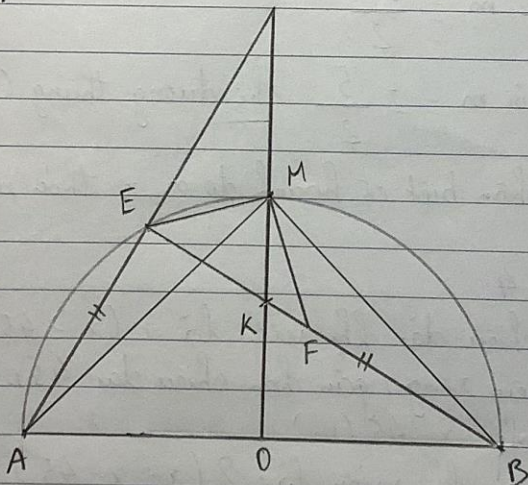
(7) $x = 60 \text{ (TM)}$

Suy ra chiều dài khu vườn là 80 m, chiều rộng khu vườn là $60 - 45 = 15$ (m)

Diện tích khu vườn là: $60 \cdot 15 = 900 \text{ (m}^2\text{)}$

Vậy diện tích khu vườn là: 900 m^2

Câu 5:



a) Vì M là điểm chính giữa của cung AB nên $OM \perp AB$
 $\Rightarrow \widehat{AOK} = 90^\circ$

Ta có $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AEK} = 90^\circ$
 Xét tứ giác $AEOK$ có: $\widehat{AOK} + \widehat{AEK} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà E, O là hai đỉnh đối diện của tứ giác $EAOK$
 $\Rightarrow EAOK$ là tứ giác nội tiếp.

b, Nội AM, FM

Vì M là điểm chính giữa cung AB nên số đo cung AM = số đo cung BM $\Rightarrow AM = BM$ (hai dây căng hai cung bằng nhau thì bằng nhau)

Xét $\triangle AEM$ và $\triangle FBM$ có:

$$AE = BF \text{ (gt)}$$

$$\widehat{EAM} = \widehat{FBM} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EM)}$$

$$AM = BM \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AEM = \triangle FBM$$

$$\Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{BMF}$$

Ta có:

$$\widehat{AMB} = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMF} + \widehat{BMF} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AMF} + \widehat{AME} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EMF} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle EMF \text{ vuông tại M.}$$

$$\text{Mà } \widehat{MEF} = \widehat{MEB} = \frac{1}{2} \widehat{MOB} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ \text{ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung BM)}$$

$$\Rightarrow \triangle EMF \text{ vuông cân tại M}$$

$$\text{c) Dễ thấy tứ giác AEMB nội tiếp (O)} \Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{ABM} \text{ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện)}$$

$$\text{Mà } \triangle MAB \text{ có: } \begin{cases} \widehat{AMB} = 90^\circ \text{ (cmt)} \\ AM = BM \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle AMB \text{ vuông cân tại M} \Rightarrow \widehat{ABM} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{DEM} = 45^\circ = \widehat{MEF} = \frac{1}{2} \widehat{DEK}$$

$$\Rightarrow EM \text{ là phân giác trong của góc DEK}$$

Áp dụng định lý đường phân giác ta có:

$$\frac{MD}{MK} = \frac{ED}{EK} \Rightarrow MK \cdot ED = MD \cdot EK$$

Câu 6:

Bút chì có đường kính đáy 8mm nên bán kính đáy bằng 4mm. Thể tích của cả cái bút chì (gồm cả lõi) là:

$$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h = 3,14 \cdot 4^2 \cdot 180 = 9043,2 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Lõi bút chì có đường kính đáy 2mm nên bán kính đáy bằng 1mm. Thể tích phần lõi bút là:

$$V_2 = \pi r_2^2 \cdot h = 3,14 \cdot 1^2 \cdot 180 = 565,2 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Thể tích phần gỗ của một chiếc bút chì là:

$$V = V_1 - V_2 = 9043,2 - 565,2 = 8478 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Thể tích phần gỗ của 2024 chiếc bút chì là:

$$2024 \cdot 8478 = 17159472 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Vậy thể tích phần gỗ của 2024 chiếc bút chì là:
17159472 mm³

Câu 7:

Đặt $x = a; y = 9b; z = 6c; x, y, z > 0$

Suy ra: $x + y + z \leq 2023$

Khi đó:

$$P = \sqrt{3x^2 + 7xy + 3y^2} + \sqrt{3y^2 + 7yz + 3z^2} + \sqrt{3z^2 + 7zx + 3x^2}$$

$$= \sqrt{5(x+y)^2 - 2(x-y)^2} + \sqrt{5(y+z)^2 - 2(y-z)^2} + \sqrt{5(z+x)^2 - 2(z-x)^2}$$

Vì $(x-y)^2 \geq 0; (y-z)^2 \geq 0; (z-x)^2 \geq 0$ nên ta có:

$$P \leq \sqrt{5(x+y)^2} + \sqrt{5(y+z)^2} + \sqrt{5(z+x)^2}$$

$$= \sqrt{5}(x+y) + \sqrt{5}(y+z) + \sqrt{5}(z+x)$$

$$= 2\sqrt{5}(x+y+z) \leq 2\sqrt{5} \cdot 2023 = 4046\sqrt{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$

$$\text{hay } a = 9b = 6c = \frac{2023}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $4046\sqrt{5}$ khi $a = 9b = 6c = \frac{2023}{3}$