

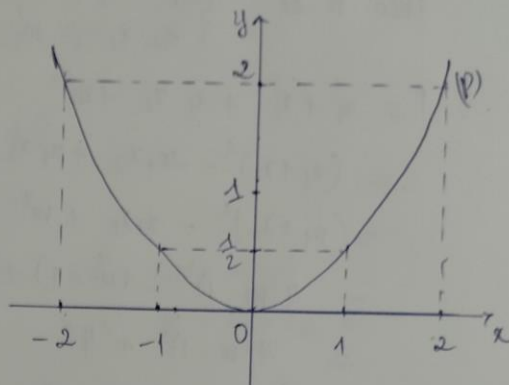
Câu 1

1. $3\sqrt{49} - \sqrt{121} = 3 \cdot \sqrt{7^2} - \sqrt{11^2} = 3 \cdot 7 - 11 = 10$

2. Vẽ đồ thị (P)

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



3. d): $y = 2x + 1$

(d'): $y = ax + b$

$d \parallel d' \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b \neq 1 \end{cases} \Rightarrow (d'): y = 2x + b \quad (b \neq 1)$

$A(2, 3) \in d' \Rightarrow 3 = 2 \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = -1$ (thỏa mãn)

Vậy $a = 2, b = -1$

Câu 2

1. a) $x^4 - 8x^2 - 4 = 0$ (*)

Đặt $x^2 = t, t \geq 0$ (*) trở thành: $t^2 - 8t - 4 = 0$ (**)

Có $a \neq b + c = 1 + 3 - 4 = 0$

$\Rightarrow$ (*) có 2 nghiệm: $t = -1$; $t = \frac{-c}{a} = 4$ (thỏa mãn)
(loại)

Với $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của pt (*) là $S = \{-2; 2\}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

2. $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4 = 0$ (1)

a) $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 4) = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 4 = -2m + 5$

Để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m + 5 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$

(1)

b) Với $m < \frac{5}{2}$, (1) có nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Theo Vi-et: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P &= x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + m^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_1 x_2 + m^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 + m^2 \\ &= 4(m-1)^2 - (m^2 - 4) + m^2 \\ &= 4(m-1)^2 + 4. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } (m-1)^2 \geq 0 \quad \forall m \Rightarrow P \geq 4 \quad \forall m.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m=1$ thì P đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 8.

Ban đầu, Có thời gian đờ I, đờ II làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (ngày) ($x, y > 0$).

→ Trong 1 ngày, đờ I làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)
đờ II làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

Theo bài ra ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \quad (1)$$

Trong 12 ngày đầu, cả 2 đờ làm được $\frac{12}{x} + \frac{12}{y}$ (công việc)

Trong 4 ngày còn lại, đờ II làm được $1,5 \cdot \frac{4}{y} = \frac{6}{y}$ (công việc)

Theo bài ra ta có:

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{y} + \frac{6}{y} = 1 \Leftrightarrow \frac{12}{x} + \frac{18}{y} = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} & (I) \\ \frac{12}{x} + \frac{18}{y} = 1 & (II) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \frac{1}{x} = a \\ \frac{1}{y} = b \end{cases} \quad (a, b > 0) \quad (I) \text{ trở thành: } \begin{cases} a + b = \frac{1}{16} \\ 12a + 18b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{48} \\ b = \frac{1}{24} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 48 \\ y = 24 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy đờ I làm 1 mình sau 48 ngày xong công việc, còn đờ II sau 24 ngày.

Câu 4

1. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC có:

$$AH^2 = BH \cdot HC = 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow AH = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

Để theo định lý Pi-ta-go ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 20 + 4^2 = 36 \Rightarrow AB = 6 \text{ (cm)}$$

Vậy $AH = 2\sqrt{5} \text{ cm}$, $AB = 6 \text{ cm}$.

2.

a) $BF \perp AC \Rightarrow \widehat{BFC} = 90^\circ$

$AE \perp BC \Rightarrow \widehat{AEC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BFC} + \widehat{AEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\rightarrow$ Tứ giác $CEHF$ nội tiếp đường tròn

Có $\widehat{HFC} = 90^\circ$

$\rightarrow$ góc $\widehat{HFC}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn

$\rightarrow HC$ là đường kính

$\Rightarrow$ tâm đường tròn là trung điểm HC .

b) H là trực tâm $\triangle ABC \Rightarrow HC \perp AB$.

Có: $\widehat{AED} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BD \perp AB$ $\Rightarrow HC \parallel BD$

Chứng minh tương tự ta có: $CD \parallel HB$.

$\Rightarrow BHCD$ là hình bình hành.

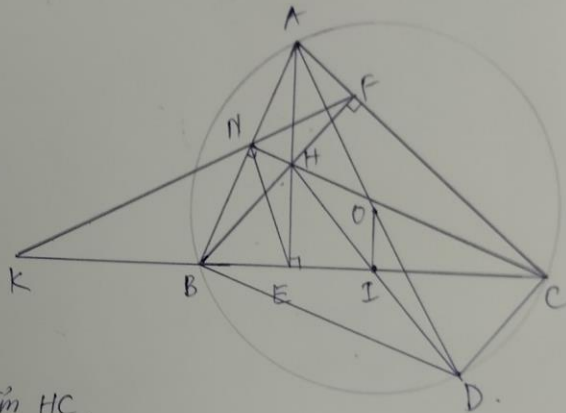
Trên I là giao điểm của HD và $BC \Rightarrow I$ là trung điểm của HD và BC .

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của $\triangle AHD \Rightarrow OI \parallel AH, OI = \frac{1}{2}AH$.

$$\text{Có } OI \perp BC, \text{ xét } \triangle \text{ vuông } OBI \text{ có: } OI^2 = OB^2 - BI^2 = R^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow OI^2 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow OI = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow AH = 2OI = R$$



c) $CH \perp AB \Rightarrow CN \perp AB \Rightarrow \widehat{HNA} + \widehat{HFA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác ANHF nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{FNH} = \widehat{FAH} \quad (1)$

Chứng minh tương tự ta có: BEHN là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{HBE} = \widehat{HNE} \quad (2)$

Lại có: $\widehat{FAH} = \widehat{HBE}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$). (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{FNH} = \widehat{HNE} \Rightarrow NH$ là tia phân giác góc $\widehat{ENF}$.

Mà $\widehat{ENK}$ kề bù với $\widehat{ENF}$, $NH \perp NB$.

$\Rightarrow NB$ là phân giác trong của $\widehat{KNE}$.
 NH là phân giác ngoài của $\widehat{KNE}$.

$\Rightarrow \frac{BE}{BK} = \frac{CE}{CK}$

$\Rightarrow BE \cdot CK = BK \cdot CE \quad (\text{đpcm})$



Câu 5:

$$\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^2 - 12x + 2024} = \frac{1}{x^2 - 3x + 506} \quad (1)$$

ĐKXĐ: $\begin{cases} 3x^2 \neq 0 \\ x^2 - 12x + 2024 \neq 0 \\ x^2 - 3x + 506 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$

Đặt $\begin{cases} 3x^2 = a \\ x^2 - 12x + 2024 = b \end{cases} \Rightarrow a+b = 4x^2 - 12x + 2024 = 4(x^2 - 3x + 506)$

(1) trở thành:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{4}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 = 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - (x^2 - 12x + 2024) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 12x - 2024 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 1012 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta' = 3^2 + 1012 = 1021$$

Phương trình (*) có 2 nghiệm:

$$x_1 = -3 - \sqrt{1021}; \quad x_2 = -3 + \sqrt{1021} \quad (\text{thỏa mãn ĐKXĐ})$$

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm:

$$x = -3 - \sqrt{1021}, \quad x = -3 + \sqrt{1021}$$