

Đề thi vào 10 Thanh Hoá

câu I

$$\begin{aligned}
 1) \quad P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4} \quad \text{với } x \geq 0, x \neq 4 \\
 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2) - 2 - 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x - 2\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} + 2 - 2 - 5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{2x - 4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}
 \end{aligned}$$

vậy $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

$$\begin{aligned}
 2) \quad \text{Để } P > 1 \text{ thì } \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} > 1 &\Leftrightarrow 2\sqrt{x} > \sqrt{x}+2 \quad (\text{vì } \sqrt{x}+2 > 0) \\
 \Rightarrow 2\sqrt{x} - \sqrt{x} > 2 &\Rightarrow \sqrt{x} > 2 \Rightarrow x > 4
 \end{aligned}$$

vậy $x > 4$ thì $P > 1$.

câu II.

1. đường thẳng d: $y = ax + b$

(d) có hệ số góc bằng 3 hay $a = 3 \Rightarrow y = 3x + b$

(d) đi qua $M(-1; 2)$ thì: $2 = 3(-1) + b \Rightarrow b = 5$

vậy $a = 3; b = 5$.

$$2) \quad \begin{cases} 3x + y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 4 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

vậy hệ pt có nghiệm $(x; y) = (1; 3)$

Câu III. 1. $x^2 - 3x + 2 = 0$

taco' $1 + (-3) + 2 = 0$ nên phương trình có nghiệm

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2.$$

vậy tập nghiệm của pt là $S = \{1; 2\}$.

2. với $a = 1 \neq 0$ và $ac = -m^2 - 2 < 0$

nên phương trình có nghiệm trái dấu với mọi giá trị m

Mà $x_1 < x_2$ nên $x_1 < 0 < x_2$ suy ra $|x_1| = -x_1$, $|x_2| = x_2$

Theo hệ thức vi-et-taco':
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -m^2 - 2 \end{cases} \quad (*)$$

Thay vào: $x_2 - 2|x_1| - 3x_1 x_2 = 3m^2 + 3m + 4$

$$(*) \quad x_2 + 2x_1 - 3x_1 x_2 = 3m^2 + 3m + 4$$

$$(**) \quad x_2 + 2x_1 - 3(-m^2 - 2) = 3m^2 + 3m + 4$$

$$(**) \quad x_2 + 2x_1 = 3m - 2$$

khử đạo:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ 2x_1 + x_2 = 3m - 2 \end{cases} \quad (***) \quad \begin{cases} x_1 = m - 2 \\ x_2 = m + 2 \end{cases}$$

Thay vào (*) ta có: $m^2 - 4 = -m^2 - 2 \Rightarrow m = \pm 1$

vậy $m = \pm 1$

3) CM: $\left(\frac{HA}{HD}\right)^2 - \frac{AC}{HN} = 1.$

$MD \cdot MC = MH \cdot MO = (MA^2) \Rightarrow DHOC$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MHD} = \widehat{OCD} = \widehat{ODC} = \widehat{OHC}$

$\Rightarrow \widehat{DHA} = \widehat{AHC} = \frac{1}{2} \widehat{DHC} = \frac{1}{2} \widehat{DOC} = \widehat{DBC}$

$\widehat{DAH} = \widehat{DCB}$

$\Rightarrow \widehat{DHA} + \widehat{DAH} = \widehat{DBC} + \widehat{DCB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ADH} = 90^\circ$

$\Rightarrow NH^2 = ND \cdot NA = NM^2 \Rightarrow NH = NM$

$\Rightarrow \frac{HA^2}{HD^2} = \frac{AD \cdot AN}{AD \cdot DN} = \frac{AN}{DN}$

$\frac{AC}{HN} = \frac{AC}{MN} = \frac{AD}{DN}$

$\Rightarrow \frac{HA^2}{HD^2} - \frac{AC}{HN} = \frac{AN}{DN} - \frac{AD}{DN} = \frac{ND}{DN} = 1. \quad (\text{đpcm}).$

Ta chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{8}{(m+n)^2}$

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{m^2 \cdot n^2}} = \frac{2}{m \cdot n}$

Do đó $m \cdot n \leq \frac{(m+n)^2}{4}$

Nên suy ra: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{8}{(m+n)^2}$

Ta có: $4x^2 + 4 \geq 2\sqrt{4x^2 \cdot 4} = 8x$

$y^2 + 16 \geq 2\sqrt{y^2 \cdot 16} = 8y$

$4z^2 + 4 \geq 2\sqrt{4z^2 \cdot 4} = 8z$

$\Rightarrow 8x + 8y + 8z \leq 4x^2 + y^2 + 4z^2 + 24 \leq 6y + 24$

(*) $3 \geq x + y + \frac{y}{4}$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{16}{(y+4)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} &= \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{y}{4}+1\right)^2} + \frac{8}{(x+3)^2} \\ &\geq \frac{8}{\left(x+\frac{y}{4}+2\right)^2} + \frac{8}{(x+3)^2} \geq 8 \cdot \frac{8}{\left(x+\frac{y}{4}+2+x+3\right)^2} \geq 8 \cdot \frac{8}{(3+y)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Vậy $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{16}{(y+4)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} + 2023 \geq 1 + 2023 = 2024$

Đẳng thức xảy ra khi $x=1, y=4, z=1$