SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA**
<u>ĐỀ CHÍNH THỨC</u>	**NĂM HỌC 2022-2023**
	Khóa ngày 20 tháng 9 năm 2022
	Môn thi: TOÁN
	BÀI THI THỨ NHẤT
SỐ BÁO DANH:……………	Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
	Đề gồm có 01 trang và 04 câu

Câu 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2022 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{n+2022}{nu_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $\lim u_n = +\infty.$

b) Tìm giới hạn $\lim \dfrac{u_n^2}{2n+1}.$

Câu 2 (5,0 điểm). Cho $P(x)$ là đa thức monic bậc n (với $n \in \mathbb{N}^*$) có đúng n nghiệm thực phân biệt. Biết rằng tồn tại duy nhất số thực a mà $P(a^2+4a+2022)=0$. Chứng minh rằng đa thức $P(x^2+4x+2022)$ chia hết cho đa thức $(x+2)^2$ và $P(2022) \geq 4^n$.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC có $AB = AC$, I là tâm đường tròn nội tiếp và (T) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Các đường thẳng BI và CI lần lượt cắt (T) tại điểm thứ hai là M và N. Gọi D là điểm thuộc (T), nằm trên cung BC không chứa A; E, F lần lượt là các giao điểm của AD với BI và CI; P là giao điểm của DM với CI; Q là giao điểm của DN với BI.

a) Chứng minh rằng các điểm D, I, P, Q cùng nằm trên một đường tròn (Ω).

b) Chứng minh rằng các đường thẳng CE và BF cắt nhau tại một điểm trên đường tròn (Ω).

Câu 4 (5,0 điểm). Cho A là tập hợp gồm các số nguyên dương thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

a) Nếu $a \in A$ thì tất cả các ước số dương của a cũng thuộc A;

b) Nếu $a, b \in A$ mà $1 < a < b$ thì $1 + ab \in A.$

Chứng minh rằng nếu A có ít nhất 3 phần tử thì A là tập hợp tất cả các số nguyên dương.

-------------HẾT------------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA NĂM HỌC 2022-2023**
<u>HƯỚNG DẪN CHẤM</u>	**Khóa ngày 20 tháng 9 năm 2022**
	Môn thi: TOÁN
	BÀI THI THỨ NHẤT
	Đáp án này gồm có 05 trang

YÊU CẦU CHUNG

(Đáp án, hướng dẫn này có 05 trang)

*** Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lô gic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.**

*** Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu hình, nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.**

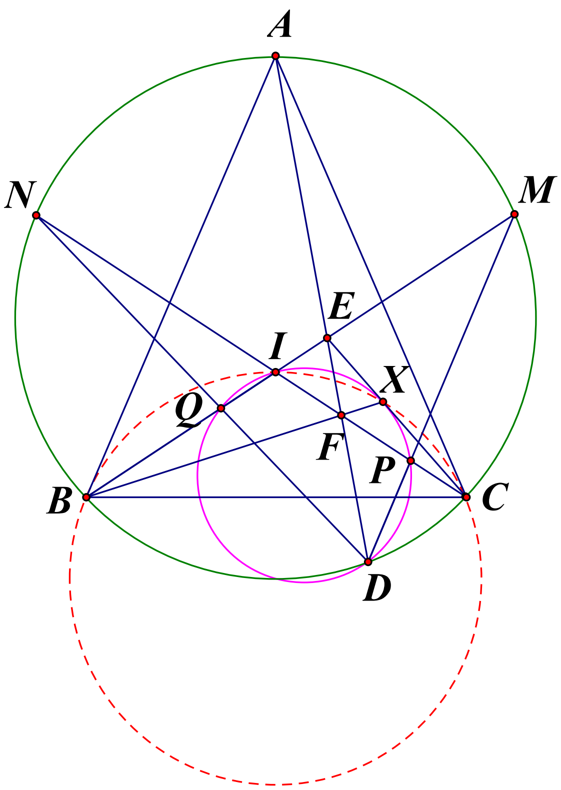
*** Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,5 điểm. Đối với điểm thành phần lớn hơn 0,5 điểm thì tuỳ tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,5 điểm.**

*** Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tuỳ theo mức điểm của từng bài.**

*** Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài**

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a (2,0 điểm)	Ta có $u_n > 0, \forall n \geq 1$. Suy ra $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2022}{nu_n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	**0,5 điểm**
	Suy ra (u_n) là dãy số tăng ngặt.	**0,5 điểm**
	Giả sử (u_n) là dãy số bị chặn trên. Suy ra (u_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $L = \lim u_n$ thì $L \geq 1$ (do $u_1 = 2022$). Từ $u_{n+1} = u_n + \dfrac{n+2022}{nu_n}$ suy ra $L = L + \dfrac{1}{L} \Rightarrow \dfrac{1}{L} = 0$ (điều này vô lý).	**0,5 điểm**
	Suy ra (u_n) là dãy số không bị chặn trên. Do đó $\lim u_n = +\infty$.	**0,5 điểm**
Câu 1b (3,0 điểm)	**Bổ đề:** Nếu $\lim(u_{n+1} - u_n) = L$ thì $\lim \dfrac{u_n}{n} = L$.	**0,5 điểm**
	Chứng minh bổ đề: Vì $\lim(u_{n+1} - u_n) = L$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại N_0 sao cho với mọi $n \geq N_0$, ta có $\lvert u_{n+1} - u_n - L \rvert < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Khi đó với mọi	**0,5 điểm**

	$n > N_0$ ta có $$\left\|\frac{u_n}{n} - L\right\| \le \frac{1}{n}\left(\left\|u_{N_0} - N_0 L\right\| + \left\|u_{N_0+1} - u_{N_0} - L\right\| + \ldots + \left\|u_n - u_{n-1} - L\right\|\right)$$ $$< \left\|u_{N_0} - N_0 L\right\|.\frac{1}{n} + (n - N_0)\frac{\varepsilon}{2n}.$$	
	Giữ N_0 cố định, ta có thể tìm được $N_1 > N_0$ sao cho $\frac{\left\|u_{N_0} - N_0 L\right\|}{N_1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Suy ra với mọi $n > N_1$ ta có $\left\|\frac{u_n}{n} - L\right\| < \varepsilon$. Vậy $\lim \frac{u_n}{n} = L$.	**0,5 điểm**
	Trở lại bài toán: Ta có $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2.\frac{n+2022}{n} + \left(\frac{n+2022}{n}\right)^2.\frac{1}{u_n^2}, \forall n \ge 1.$	**0,5 điểm**
	Mà $\lim \frac{n+2022}{n} = 1$ và $\lim \frac{1}{u_n^2} = 0$ nên $\lim(u_{n+1}^2 - u_n^2) = 2$.	**0,5 điểm**
	Theo bổ đề, ta có $\lim \frac{u_n^2}{n} = 2$. Vậy $\lim \frac{u_n^2}{2n+1} = \lim\left(\frac{u_n^2}{n}.\frac{n}{2n+1}\right) = 1$.	**0,5 điểm**
Câu 2 (5,0 điểm)	Gọi các nghiệm thực của $P(x)$ là $a_1, a_2, ..., a_n$ (với $a_1 < a_2 < ... < a_n$). Ta có biểu diễn $P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$, suy ra $$P(x^2 + 4x + 2022) = \prod_{i=1}^{n}(x^2 + 4x + 2022 - a_i).$$	**0,5 điểm**
	Với mỗi $i \in \{1; 2; ...; n\}$ thì tam thức bậc hai $x^2 + 4x + 2022 - a_i$ có biệt thức $\Delta_i' = 4 - (2022 - a_i) = a_i - 2018$. Từ $a_1 < a_2 < ... < a_n$ suy ra $\Delta_1' < \Delta_2' < ... < \Delta_n'$.	**0,5 điểm**
	Do đa thức $P(x^2 + 4x + 2022)$ có nghiệm thực duy nhất nên phải có $\Delta_n' = 0$ và nếu $n > 1$ thì $\Delta_i' < 0, \forall i = \overline{1, n-1}$.	**0,5 điểm**
	Từ $\Delta_n' = 0$ ta có $x^2 + 4x + 2022 - a_n = (x+2)^2$. Suy ra $P(x^2 + 4x + 2022) \vdots (x+2)^2$.	**1,0 điểm**
	Mặt khác, $P(2022) = \prod_{i=1}^{n}(2022 - a_i) = \prod_{i=1}^{n}(4 - \Delta_i')$.	**0,5 điểm**

	Với $n=1$ thì ta có $P(2022)=4-\Delta_n^{'}=4.$	**0,5 điểm**
	Với $n>1$ thì ta có $P(2022)=\prod_{i=1}^{n}(2022-a_i)=\prod_{i=1}^{n}(4-\Delta_i^{'})=\prod_{i=1}^{n-1}(4-\Delta_i^{'})(4-\Delta_n^{'})>4^{n-1}.4=4^n.$	**1,0 điểm**
	Vậy ta luôn có $P(2022)\geq 4^n.$	**0,5 điểm**
Câu 3a (2,5 điểm)	 Gọi β là góc $\widehat{CBA}$ và X là giao điểm của CE và BF .	
	Ta có $\widehat{QIP}=\widehat{BIC}=180^0-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{2}=180^0-\beta.$	**1,0 điểm**
	Mặt khác $\widehat{PDQ}=\widehat{MDA}+\widehat{ADN}=\widehat{MBA}+\widehat{ACN}=\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{2}=\beta$ (do A,M,C,D,B,N cùng nằm trên đường tròn (T)).	**1,0 điểm**
	Từ đó suy ra D,Q,I,P cùng nằm trên một đường tròn (Ω).	**0,5 điểm**
Câu 3b (2,5 điểm)	Ta có $\widehat{BIF}=\widehat{BIC}=180^0-\beta$ mà $\widehat{FDB}=\widehat{ADB}=\widehat{ACB}=\beta$, từ đó suy ra B,I,F,D cùng nằm trên một đường tròn.	**0,5 điểm**
	Ta có I,E,C,D cùng thuộc một đường tròn.	**0,5 điểm**

	Thật vậy, $\widehat{BCD}=\widehat{BMD}$ (do cùng chắn một cung của đường tròn (T)) và $\widehat{ICB}=\frac{\beta}{2}=\widehat{MBA}=\widehat{MDA}=\widehat{MDE}$. Xét tam giác DEM , ta có $\widehat{IED}=\widehat{MDE}+\widehat{EMD}=\widehat{ICB}+\widehat{BCD}=\widehat{ICD}$. Từ đó suy ra I,E,C,D cùng thuộc một đường tròn.	
	Từ đó suy ra $\widehat{ECI}=\widehat{EDI}$ (do I,E,C,D cùng thuộc một đường tròn) và $\widehat{FDI}=\widehat{FBI}$ (do F,D,B,I cùng thuộc một đường tròn). Do vậy $\widehat{XCI}=\widehat{XBI}$, suy ra I,X,C,B cùng thuộc một đường tròn.	**0,5 điểm**
	Để hoàn tất chứng minh ta cần phải chỉ ra được $\widehat{IXD}=\widehat{IPD}$. Do tứ giác $IXCB$ nội tiếp, ta suy ra $\widehat{EXI}=180^0-\widehat{IXC}=\widehat{CBI}=\frac{\beta}{2}$. Ta cũng có $\widehat{BXC}=\widehat{BIC}=180^0-\beta$, mà $\widehat{CDF}=\beta$. Từ đó suy ra tứ giác $DFXC$ nội tiếp và $\widehat{DFC}=\widehat{DXC}$.	**0,5 điểm**
	Ta lại có $$\begin{aligned}\widehat{IPD}&=180^0-\widehat{PDF}-\widehat{DFC}=180^0-\frac{\beta}{2}-\widehat{DXC}\\&=180^0-\widehat{EXI}-\widehat{DXC}=\widehat{IXD}\end{aligned}.$$ Như vậy chứng minh hoàn tất.	**0,5 điểm**
Câu 4 (5,0 điểm)	+ Ta chứng minh A chứa các số $1,2,3,4,5,6$. Ta có $1\in A$.	**0,5 điểm**
	Nếu $2\notin A$ thì theo a) ta suy ra tất cả các phần tử của A đều là số lẻ. Vì A có ít nhất 3 phần tử, ta chọn $a,b\in A$ với $1<a<b$. Theo b) thì $1+ab\in A$, nhưng $1+ab$ là số chẵn. Điều này mâu thuẫn. Do đó $2\in A$.	**1,0 điểm**
	Vì $\lvert A\rvert\geq 3$ nên tồn tại $a>2$ và $a\in A$. Áp dụng b) ta suy ra $1+2a\in A\Rightarrow 1+2(1+2a)=3+4a\in A\Rightarrow b=1+(1+2a)(3+4a)\in A$, nhưng $$\begin{aligned}&b=1+(1+2a)(3+4a)\,\vdots\,2\Rightarrow b\,\vdots\,2\\&\Rightarrow\begin{cases}c=1+(1+2b)(3+4b)\,\vdots\,4\\c\in A\end{cases}\\&\Rightarrow 4\in A\end{aligned}$$	**1,0 điểm**

	Lại có $1+2.4=9\in A$ nên $3\in A$ và $1+2.3=7\in A, 1+2.7=15\in A$, suy ra $5\in A$. Mặt khác, $1+5.7=36\in A$ nên $6\in A$.	**0,5 điểm**
	+ Ta sử dụng nguyên lý quy nạp mạnh chứng minh rằng mọi số nguyên dương n đều thuộc A. Theo chứng minh trên, ta có $1,2,3,4,5,6\in A$. Giả sử với $n\geq 7$ ta có $1,2,3,...,n-1\in A$. Xảy ra 2 trường hợp: - Trường hợp n là số lẻ. Đặt $n=2k+1$ với $k>2$, khi đó $n\in A$ vì $2,k\in A$.	**1,0 điểm**
	- Trường hợp n là số chẵn. Đặt $n=2k$ với $k>3$. Vì $k,k-1\in A$ đều lớn hơn 2, ta có $1+2k\in A$ và $1+2(k-1)=2k-1\in A$. Suy ra $1+(2k-1)(2k+1)=4k^2\in A\Rightarrow 2k\in A$. Điều này chứng tỏ $n\in A$. Theo nguyên lý quy nạp mạnh ta có điều phải chứng minh.	**1,0 điểm**

---------------- Hết ----------------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN**
	DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
ĐỀ CHÍNH THỨC	**NĂM HỌC 2022-2023**
	Khóa ngày 20 tháng 9 năm 2022
	Môn thi: TOÁN
	BÀI THI THỨ HAI
SỐ BÁO DANH:……………	Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
	Đề gồm có 01 trang và 03 câu

Câu 5 (6,0 điểm). Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x-3f(y)) = xf(y) - yf(x) - 2f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 6 (7,0 điểm). Cho số nguyên tố $p > 3$.

a) Giả sử $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}=\frac{m}{n}$, với m và n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng m chia hết cho p.

b) Chứng minh rằng $C_{5p-1}^{p-1}-1$ chia hết cho p^3.

Câu 7 (7,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng l đối xứng với đường thẳng AC qua đường thẳng BC, l cắt BO tại X. Điểm E tùy ý trên đoạn BO, đường tròn ngoại tiếp tam giác XAE cắt đường thẳng l tại Q khác X. Đường thẳng QE cắt đường thẳng OC tại Y.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AYE đi qua điểm cố định khi E thay đổi trên đoạn BO.

b) Gọi M là điểm chính giữa cung AE không chứa Y của đường tròn ngoại tiếp tam giác AYE và CM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AYE tại một điểm K khác M. Chứng minh rằng khi E thay đổi trên đoạn BO thì đường thẳng KE luôn đi qua một điểm cố định.

------------HẾT------------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

<u>HƯỚNG DẪN CHẤM</u>

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI
HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA NĂM HỌC 2022-2023
Khóa ngày 20 tháng 9 năm 2022
Môn thi: TOÁN

BÀI THI THỨ HAI

Đáp án này gồm có 04 trang

YÊU CẦU CHUNG

*** Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lô gic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.**

*** Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu hình, nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.**

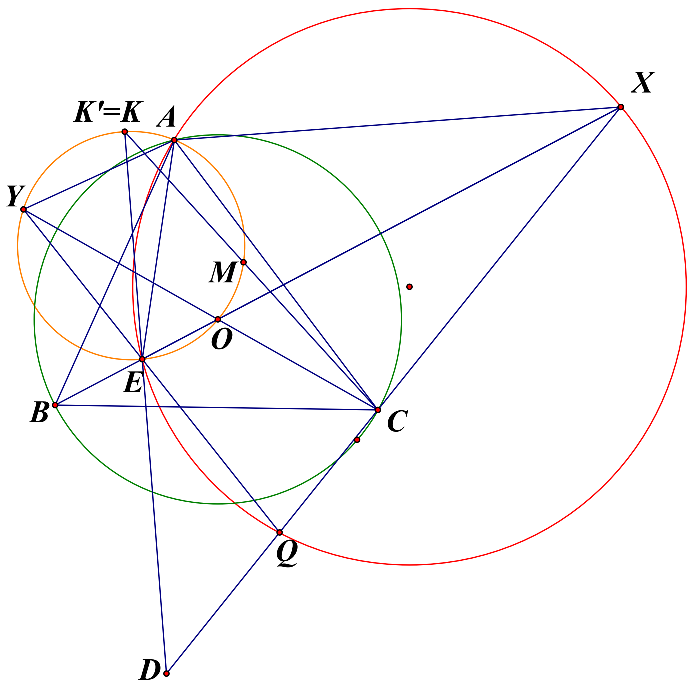
*** Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,5 điểm. Đối với điểm thành phần lớn hơn 0,5 điểm thì tuỳ tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,5 điểm.**

*** Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tuỳ theo mức điểm của từng bài.**

*** Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.**

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 5 (6,0 điểm)	Thay $x=0$ vào giả thiết ta có $$f(-3f(y)) = -yf(0) - 2f(0), \forall y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$	**1,0 điểm**
	- **Trường hợp 1:** $f(0)=0$. Thay $y=0$ vào giả thiết ta có $f(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}.$	**0,5 điểm**
	- **Trường hợp 2:** $f(0) \neq 0$. Từ (1) suy ra f là toàn ánh. Suy ra tồn tại c sao cho $f(c)=0$. Thay $y=c$ vào giả thiết bài toán ta có $f(x) = -cf(x) - 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. (2)	**1,0 điểm**
	Nếu $c \neq -3$ thì từ (2) suy ra $f(x)=0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0)=0$ (điều này mâu thuẫn). Do đó $c=-3$ suy ra $f(-3)=0$.	**0,5 điểm**
	Thay $x=-3$ vào giả thiết ta có $f(-3-3f(y)) = -3f(y), \forall y \in \mathbb{R}.$ Suy ra $f(-3+t)=t$ với mọi t có dạng $t=-3f(y)$.	**1,0 điểm**
	Mà f là toàn ánh nên $-3f(y)$ quét hết mọi giá trị trên $\mathbb{R}$. Do vậy $-3+t$ chạy khắp $\mathbb{R}$.	**1,0 điểm**

	Suy ra $f(x)=x+3,\forall x\in\mathbb{R}.$ Thử lại thỏa mãn.	**0,5 điểm**
	Vậy $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x)=x+3,\forall x\in\mathbb{R}$ là các hàm số cần tìm.	**0,5 điểm**
Câu 6a (3,0 điểm)	Theo định lý Bezout, với mỗi $i\in\{1,2,...,p-1\}$, tồn tại duy nhất $j_i\in\{1,2,...,p-1\}$ sao cho $i.j_i\equiv 1(\bmod p)$.	**1,0 điểm**
	Từ đó $$m=n\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}\right]$$ $$\equiv n(j_1^2+j_2^2+j_3^2+...+j_{p-1}^2)(\bmod p).$$	**1,0 điểm**
	Mặt khác, $(j_1,j_2,j_3,...,j_{p-1})$ là một hoán vị của $(1,2,3,...,p-1)$ nên $$m\equiv n\sum_{i=1}^{p-1}j_i^2=n\sum_{1}^{p-1}i^2\,(\bmod p).$$	**0,5 điểm**
	Mặt khác, ta biết rằng với $p>3$ ta có $$\sum_{1}^{p-1}i^2=\frac{p(p-1)(2p-1)}{6}\equiv 0(\bmod p).$$ Vậy m chia hết cho p.	**0,5 điểm**
Câu 6b (4,0 điểm)	Theo định lý Fermat nhỏ, đa thức $(x-1)(x-2)...(x-p+1)-(x^{p-1}-1)$ là đa thức bậc $p-2$ có $p-1$ nghiệm phân biệt $1,2,3,...,p-1$ theo modulo p nên có tất cả các hệ số chia hết cho p.	**0,5 điểm**
	Xét đa thức $P(x)=(x-1)(x-2)...(x-p+1)=x^{p-1}+a_1x^{p-2}+...+a_{p-1}.$ Ta có $a_1,a_2,...,a_{p-3},a_{p-2}$ chia hết cho p và $$a_{p-1}=(-1)^{p-1}(p-1)!=(p-1)!.$$	**0,5 điểm**
	Thay $x=p$ vào $P(x)$, ta được $$(p-1)!=p^{p-1}+a_1p^{p-2}+...+a_{p-2}p+a_{p-1}.$$ Nên $a_{p-2}=-p^{p-2}-a_1p^{p-3}-...-a_{p-3}p\,\vdots\,p^2.$	**1,0 điểm**
	Thay $x=5p$ vào $P(x)$, ta được	**1,0 điểm**

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$(5p-1)(5p-2)...(4p+1)=(5p)^{p-1}+a_1(5p)^{p-2}+...+a_{p-2}(5p)+a_{p-1}$
$\equiv a_{p-3}(5p)^2+a_{p-2}(5p)+a_{p-1}\ (\bmod p^3).$</td><td></td></tr>
<tr><td>Hơn nữa $a_{p-3}(5p)^2+a_{p-2}(5p)\equiv 0\ (\bmod p^3)$ (do $a_{p-3}\equiv 0\ (\bmod p)$ và $a_{p-2}\equiv 0\ (\bmod p^2)$) nên $(5p-1)(5p-2)...(4p+1)\equiv a_{p-1}\ (\bmod p^3)$.</td><td>0,5 điểm</td></tr>
<tr><td>Do đó $\dfrac{(5p-1)(5p-2)...(4p+1)}{(p-1)!}\equiv 1\ (\bmod p^3)$.
Vậy ta có điều phải chứng minh.</td><td>0,5 điểm</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Câu 7a (3,0 điểm)</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Ta có $\widehat{BOC}=2\widehat{A}$,
$\widehat{OCX}=180^0-\widehat{OCQ}=180^0-\widehat{OCB}-\widehat{BCQ}=180^0-(90^0-\widehat{A})-\widehat{C}=90^0+\widehat{A}-\widehat{C}$
Từ đó $\widehat{OXC}=\widehat{BOC}-\widehat{OCX}=90^0-\widehat{B}=\widehat{OAC}$.
Suy ra O,X,A,C thuộc một đường tròn.</td><td>1,0 điểm</td></tr>
<tr><td>Mà $OA=OC$ nên XO là phân giác góc $\widehat{AXC}$ hay XE là phân giác góc $\widehat{AXQ}$. Ta được tam giác AEQ đồng dạng tam giác tam giác AOC.</td><td>1,0 điểm</td></tr>
<tr><td>Tồn tại phép vị tự quay tâm A biến E thành O, Q thành C. Vì EQ giao OC tại Y nên Y,E,O,A thuộc một đường tròn hay đường tròn (AYE) đi qua điểm O cố định.</td><td>1,0 điểm</td></tr>
<tr><td>Câu 7b (4,0</td><td>Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC thì D cố định. Ta chứng</td><td>1,0 điểm</td></tr>
</table>

điểm)	minh KE đi qua D. Gọi DE cắt CM tại K', ta chứng minh K' trùng K. Muốn vậy ta chứng minh K' thuộc đường tròn (AYE). Ta có tam giác AME cân tại M, tam giác AOB cân tại O và $\widehat{AME} = \widehat{AOE} = \widehat{AOB}$ nên tam giác AME đồng dạng với tam giác AOB. Từ đó suy ra $\frac{AM}{AO} = \frac{AE}{AB}$ và $\widehat{MAO} = \widehat{EAB}$.	
	Vậy tam giác AMO đồng dạng tam giác AEB nên có phép vị tự quay f tâm A biến M thành E, O thành B.	**0,5 điểm**
	Lại có $\widehat{MOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOM} = 2\widehat{B} - \widehat{ABE} = \widehat{EBD}$ và $$\frac{MO}{OC} = \frac{MO}{OA} = \frac{EB}{BA} = \frac{EB}{BD}$$	**0,5 điểm**
	Nên tam giác MOC đồng dạng và cùng chiều với tam giác EBD. Tồn tại phép vị tự quay biến M thành E, O thành B, C thành D. Rõ ràng đó là phép vị tự quay f ở trên, có tâm A.	**1,0 điểm**
	Và DE cắt MC tại K' thì K', M, E, A thuộc một đường tròn. Ta có điều phải chứng minh. Vậy KE luôn đi qua D cố định.	**1,0 điểm**

------------- Hết ----------------