UBND HUYỆN TIÊN DU
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC: 2022 - 2023
Môn thi: **TOÁN 9**
Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 22/2/2023

I. PHẦN CHUNG

Câu 1(3,0 điểm) Cho biểu thức $A=\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)$

1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A.
2) Tính giá trị của A tại $x=4+2\sqrt{3}$.

Câu 2(3,0 điểm)

Cho hai đường thẳng $(d_1): mx-y=1; (d_2): x+4(m+1)y=m;$ với $m\neq -1$.

1) Chứng minh rằng đường thẳng (d_1) đi qua điểm A cố định, đường thẳng (d_2) đi qua điểm B cố định với mọi $m\neq -1$.
2) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B.

Câu 3(3,5 điểm)

1) Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x+3}=\dfrac{x-3}{4}$.
2) Gọi *x, y* là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}\sqrt{x+4}+\sqrt{y-5}=9\\ \sqrt{x-5}+\sqrt{y+4}=9\end{cases}$

   Tính $M=2x+3y$.

Câu 4(6,5 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O với bán kính R, đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB chứa nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến Ax tại A của nửa đường tròn. Xét điểm M thay đổi trên Ax, không trùng với A. Gọi E là điểm đối xứng với A qua OM.

a) Chứng minh rằng ME là một tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).
b) Đoạn OM cắt nửa đường tròn (O) tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác AME.
c) Gọi N là trung điểm EB. Tia ME cắt ON tại P. Hãy xác định vị trí của điểm M trên tia Ax để diện tích tam giác OMP đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó theo R.
d) Gọi C là giao điểm của BE và tia Ax, OC cắt AE tại Q. Kẻ đường thẳng qua Q và song song với Ax, cắt OM tại D. Chứng minh A, D, P thẳng hàng.

II. PHẦN RIÊNG

Thí sinh lựa chọn làm một (chỉ một) câu trong hai câu sau:

Câu 5a (4,0 điểm)

1) Tìm cặp số nguyên (*x, y*) thỏa mãn $x(x^2-6x+12)=y^3+27$.
2) Với các số dương *x, y, z, t* thỏa mãn $x+y+z+t=4$.

   Chứng minh rằng $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}+\dfrac{1}{z^2+1}+\dfrac{1}{t^2+1}\geq 2$.

Câu 5b (4,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $ab-bc-ca$ chia hết cho 3. Chứng minh rằng nếu $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3 thì $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 27.
2) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$.

   Chứng minh rằng $\dfrac{x^3-x}{x^3+y+z}+\dfrac{y^3-y}{y^3+z+x}+\dfrac{z^3-z}{z^3+x+y}\geq 0$.

Họ và tên thí sinh :.. Số báo danh ....

UBND HUYỆN TIÊN DU
PHÒNG GD & ĐT

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: Toán - Lớp 9

Câu	**Đáp án**	**Điểm**
1.1. (2,0 điểm)		
	Cho biểu thức $A=\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)$ 3) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A. 4) Tính giá trị của A tại $x=4+2\sqrt{3}$.	
	ĐKXĐ: $x\ge 0; x\ne 1$.	0,25
	$A=\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1}\right)$ $=\frac{x+1+\sqrt{x}}{x+1}:\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right)$	0,5
	$=\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}:\frac{(x+1)-2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}$	0,25
	$=\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}:\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}$	0,25
	$=\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+1}.\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	$=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.	0,25
	Vậy $A=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25
1.2. (1,0 điểm)		
	Theo câu 1 có $A=\frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x\ge 0; x\ne 1$. Theo bài ra $x=4+2\sqrt{3}\Rightarrow x=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$ (tmđk) Thay vào A ta được:	0,25
	$A=\frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)+\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}+1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}-1}$ $=\frac{4+2\sqrt{3}+\sqrt{3}+1+1}{\sqrt{3}+1-1}$ $=\frac{6+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$	0,25
	$=3+2\sqrt{3}$	0,25
	Vậy A $=3+2\sqrt{3}$ tại $x=4+2\sqrt{3}$.	0,25
2.1 (2,0 điểm)		

	Cho hai đường thẳng $(d_1): mx - y = 1; (d_2): x + 4(m+1)y = m;$ với $m \neq -1.$ 3) Chứng minh rằng đường thẳng (d_1) đi qua điểm A cố định, đường thẳng (d_2) đi qua điểm B cố định với mọi $m \neq -1.$ 4) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B. +)Vì $(d_1): mx - y = 1 \Rightarrow y = mx - 1$ có hệ số b = -1, nên (d_1)luôn đi qua điểm cố định là A(0;-1). +)Xét $(d_2): x + 4(m+1)y = m$ với $m \neq -1.$ Gọi $B(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (d_2) đi qua với mọi $m \neq -1.$ Ta có: $x_0 + 4(m+1)y_0 = m$ với mọi $m \neq -1$ $\Leftrightarrow (4y_0 - 1)m + x_0 + 4y_0 = 0$ với mọi $m \neq -1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 4y_0 - 1 = 0 \\ x_0 + 4y_0 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{1}{4} \\ x_0 = -1 \end{cases}$ Vậy (d_2) luôn đi qua điểm cố định $B\left(-1; \frac{1}{4}\right)$ với mọi $m \neq -1.$	0,5 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
2.2 (1,0 điểm)		
	Gọi phương trình đường thẳng AB là $y = ax + b$. Theo câu 1: A(0;-1) và $B\left(-1; \frac{1}{4}\right)$ nên ta có $\begin{cases} a.0 + b = -1 \\ a.(-1) + b = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -\frac{5}{4} \end{cases}$	0,25 0,5
	Vậy PT đường thẳng AB là $y = -\frac{5}{4}x - 1.$	0,25
3.1 (2,0 điểm)		
	ĐKXĐ: $x \geq \sqrt{5}$ hoặc $x \leq -\sqrt{5}; x \neq -3.$ $\frac{\sqrt{x^2 - 5} - 2}{x + 3} = \frac{x - 3}{4}$ $\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x^2 - 5} - 2\right) = x^2 - 9$ $\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 - 5} - 8 = x^2 - 9$ $\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 - 5} = x^2 - 1$	0,25 0,5
	Đặt $\sqrt{x^2 - 5} = y\,(y \geq 0) \Rightarrow x^2 = y^2 + 5$, PT trở thành: $4y = y^2 + 5 - 1$ $\Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = 0$ $\Leftrightarrow (y-2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow y - 2 = 0$ $\Leftrightarrow y = 2$ Khi đó:	0,5

$$\sqrt{x^2-5}=2 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3(tm) \\ x=-3(l) \end{array}\right.$$

0,5

0,25

Vậy PT có tập nghiệm x = 3.

3.2 (1,5 điểm)

Gọi *x, y* là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} \sqrt{x+4}+\sqrt{y-5}=9 \\ \sqrt{x-5}+\sqrt{y+4}=9 \end{cases}$

Tính $M=2x+3y.$

Theo bài ra *x, y* là các số thực thỏa mãn

$$\begin{cases} \sqrt{x+4}+\sqrt{y-5}=9 \\ \sqrt{x-5}+\sqrt{y+4}=9 \end{cases} (DK: x \geq 5; y \geq 5)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+4}+\sqrt{y-5}=\sqrt{x-5}+\sqrt{y+4} (*)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+4}-\sqrt{x-5}=\sqrt{y+4}-\sqrt{y-5}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-5}\right)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-5}\right)}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-5}\right)}=\frac{\left(\sqrt{y+4}-\sqrt{y-5}\right)\left(\sqrt{y+4}+\sqrt{y-5}\right)}{\left(\sqrt{y+4}+\sqrt{y-5}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-5}}=\frac{9}{\sqrt{y+4}+\sqrt{y-5}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+4}+\sqrt{x-5}=\sqrt{y+4}+\sqrt{y-5} (**)$$

0,5

Từ (*) và (**) ta có:

$$\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{y-5}\right)+\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-5}\right)=\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{y+4}\right)+\left(\sqrt{y+4}+\sqrt{y-5}\right)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+4}=2\sqrt{y+4}$$

$$\Rightarrow x=y$$

0,5

Thay x = y vào $\sqrt{x+4}+\sqrt{y-5}=9$ ta được:

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-5}=9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+4}=9-\sqrt{x-5}$$

$$\Rightarrow x+4=81-2\sqrt{x-5}+x-5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-5}=4$$

0,5

$$\Leftrightarrow x=21(tm)$$

$$\Rightarrow y=21(tm)$$

Vậy $M=2.21+3.21=105.$

4.a (2,0 điểm)

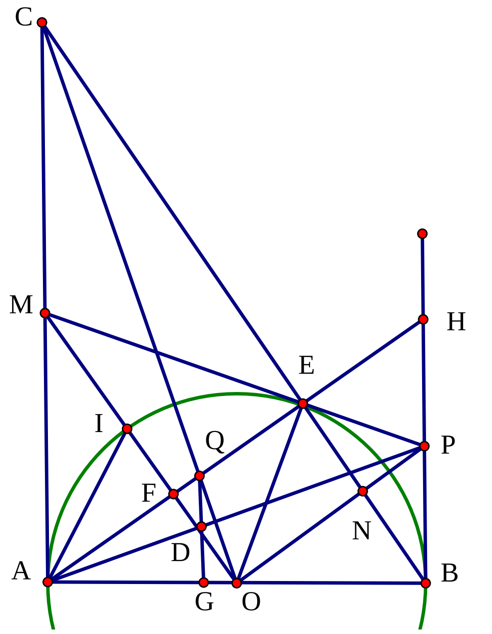
Cho nửa đường tròn tâm O với bán kính R, đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB chứa nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến Ax tại A của nửa đường tròn. Xét điểm M thay đổi trên Ax, không trùng với A. Gọi E là điểm đối xứng với A qua OM.

e) Chứng minh rằng ME là một tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

f) Đoạn OM cắt nửa đường tròn (O) tại I. Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác AME.

g) Gọi N là trung điểm EB. Tia ME cắt ON tại P. Hãy xác định vị trí của điểm M trên tia Ax để diện tích tam giác OMP đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó theo R.

h) Gọi C là giao điểm của BE và tia Ax, OC cắt AE tại Q. Kẻ đường thẳng qua Q và song song với Ax, cắt OM tại D. Chứng minh A, D, P thẳng hàng.

	 Vẽ hình đúng	0,5
	+ Chỉ ra MA là tiếp tuyến của (O), tiếp điểm là A $\Rightarrow MA \perp OA \Rightarrow MAO = 90^0$. + Do E đối xứng với A qua OM nên OM là đường trung trực của AE (1) $\Rightarrow \begin{cases} MA = ME \\ OA = OE \end{cases}$ Chứng minh $\Delta AMO = \Delta EMO(c.c.c)$ $\Rightarrow MAO = AEO = 90^0$ $\Rightarrow ME \perp EO$ Mà $OE = OA = R \Rightarrow E \in (O;R)$ Do đó ME là tiếp tuyến của (O).	0,25 0,75 0,5
4.b (1,5 điểm)		
	+ Có $MAI + IAO = MAO = 90^0$ (2) Gọi F là giao điểm của OM và AE. Từ $(1) \Rightarrow AFM = 90^0$ hay $AFI = 90^0 \Rightarrow IAF + AIF = 90^0$ hay $IAF + AIO = 90^0$ (3) Mà $A, I \in (O) \Rightarrow OA = OI \Rightarrow \Delta OAI$ cân tại O $\Rightarrow IAO = AIO$ (4) Từ (2), (3) và (4) $\Rightarrow MAI = IAF \Rightarrow$ AI là tia phân giác của MAF hay MAE	0,75
	Xét ΔMAE có MO là tia phân giác của AME (do (1)) AI là tia phân giác của MAE MO cắt AI tại I Nên I là giao điểm ba đường phân giác của ΔMAE hay I là tâm đường tròn nội tiếp ΔMAE	0,5 0,25
4.c (1,5 điểm)		
	+ Có OB = OE = R $\Rightarrow \Delta OBE$ cân tại O mà $ON \perp BE \Rightarrow ON$ là phân giác của BOE.	0,25
	+ Chỉ ra $\Delta OEP = \Delta OBP(c.g.c) \Rightarrow OPB = OEP = 90^0 \Rightarrow PB \perp AB$ Xét ΔOMP có $OE \perp MP \Rightarrow S_{OMP} = \frac{1}{2}OE.MP = \frac{1}{2}R.MP$ Mà $M \in Ax, Ax \perp AB; P \in BP, BP \perp AB \Rightarrow MP \ge AB = 2R \Rightarrow S_{OMP} \ge \frac{1}{2}.R.2R = R^2$.	0,25 0,25 0,25

	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MP//AB \Leftrightarrow OE \perp AB \Leftrightarrow AM = OE = R$ Vậy giá trị nhỏ nhất diện tích ΔOME là R^2 khi AM = R.	0,5
4.d (1,5 điểm)		
	+ ΔAEC vuông tại E $\Rightarrow \begin{cases} CAE + ACE = 90^0 \\ MEA + MEC = 90^0 \end{cases}$ Mà $CAE = MAE = MEA$ (do ΔMEA cân tại M) nên $ACE = MEC$ hay $MCE = MEC \Rightarrow \Delta MCE$ cân tại M $\Rightarrow ME = MC \Rightarrow MA = MC$	
	+ Gọi giao điểm của QD và AB là G. Ta có: QG // AC $\Rightarrow \frac{QD}{CM} = \frac{DG}{AM}\left(=\frac{OD}{OM}\right) \Rightarrow DQ = DG\left(do: CM = AM\right)$ suy ra D là trung điểm của QG. (4) + Kéo dài AE cắt BP tại H, chứng minh tương tự có P là trung điểm của BH. Gọi D' là giao điểm của AP và QG. Chứng minh tương tự được D' là trung điểm của QG (5)	0,5 0,5
	Từ (4) và (5) suy ra $D \equiv D'$ hay A, D, P thẳng hàng.	0,5
5.1 bảng A (2,0 điểm)		
	Với x, y là các số nguyên thỏa mãn $x\left(x^2-6x+12\right) = y^3+27$ Ta có: $x\left(x^2-6x+12\right) = y^3+27$ $\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x = y^3+27$ $\Leftrightarrow (x-2)^3 - y^3 = 19$ $\Leftrightarrow (x-y-2)\left[(x-2)^2+(x-2)y+y^2\right] = 19(*)$	0,5
	Do x, y là các số nguyên nên ta có: $x-y-2 \in \{\pm1;\pm19\}$ + Với x – y – 2 = -19, thay x – 2 = y - 19 vào (*) ta được $3y^2-57y+362=0$, PT này ko có nghiệm nguyên. + Với x – y – 2 = -1, thay x – 2 = y - 1 vào (*) ta được $3y^2-3y+20=0$, PT này ko có nghiệm nguyên. + Với x – y – 2 = 1, thay x- 2 = y + 1 vào (*) ta được $y^2+y-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \Rightarrow x=5 \\ y=-3 \Rightarrow x=0 \end{array}\right.$ + Với x – y – 2 = 19, thay x- 2 = y + 19 vào (*) ta được $y^2+19y+120=0$, PT này ko có nghiệm nguyên.	0,25 1,0
	Vậy có các cặp số (x, y) = (5; 2); (0; -3).	0,25
5.2 bảng A (2,0 điểm)		
	1) Với các số dương x, y, z, t thỏa mãn x + y + z + t = 4. Chứng minh rằng $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}+\frac{1}{t^2+1} \geq 2$	
	Với các số dương x, y, z, t. Biến đổi và áp dụng BĐT Cô si được: $\frac{1}{x^2+1} = 1-\frac{x^2}{x^2+1}$. Vì $x^2+1 \geq 2x \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} \leq \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \geq 1-\frac{x}{2}$ CMTT ta có:	0,5

	$\frac{1}{y^2+1} \geq 1-\frac{y}{2}$ $\frac{1}{z^2+1} \geq 1-\frac{z}{2}$ $\frac{1}{t^2+1} \geq 1-\frac{t}{2}$	0,75
	$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}+\frac{1}{t^2+1} \geq 4-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}+\frac{t}{2}\right)=4-2=2$ (do x + y + z + t = 4) Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=t=1$.	0,5 0,25
5.1 bảng B (2,0 điểm)		
	Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $ab-bc-ca$ chia hết cho 3. Chứng minh rằng nếu $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3 thì $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 27. + Nhận xét : Với mọi số nguyên x ta có $x^3-x=(x-1)x(x+1)\vdots 3$ Do đó $a^3+b^3+c^3-(a+b+c)=(a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)\vdots 3$ Nên từ giả thiết $a^3+b^3+c^3\vdots 3 \Rightarrow a+b+c\vdots 3$. Kết hợp với giả thiết $ab-bc-ca\vdots 3$ ta có: $(a+b)(a+b+c)=a^2+b^2-(ab-bc-ac)+3ab\vdots 3$ $\Rightarrow a^2+b^2\vdots 3$	 1,0
	+ Lại có với mọi $a \in Z \Rightarrow a^2$ chia cho 3 dư 0 hoặc 1. Suy ra $a^2+b^2\vdots 3$ thì cả a và b đều chia hết cho 3 $\Rightarrow c\vdots 3$	0,5 0,25
	Vậy $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 27.	0,25
5.2 bảng B (2,0 điểm)		
	Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Chứng minh rằng $\frac{x^3-x}{x^3+y+z}+\frac{y^3-y}{y^3+z+x}+\frac{z^3-z}{z^3+x+y} \geq 0$.	
	Ta có $\frac{x^3-x}{x^3+y+z}-\frac{x^2-1}{x(x+y+z)}$ $=\frac{x^2-1}{x}\left(\frac{x^2}{x^3+y+z}-\frac{1}{x+y+z}\right)$ $=\frac{(x^2-1)^2(y+z)}{x(x^3+y+z)(x+y+z)} \geq 0$ $\Rightarrow \frac{x^3-x}{x^3+y+z} \geq \frac{x^2-1}{x(x+y+z)}=\frac{x-\frac{1}{x}}{x+y+z}$	 0,5
	CMTT ta có: $\frac{y^3-y}{y^3+z+x} \geq \frac{y-\frac{1}{y}}{x+y+z}$	 0,75

	$\dfrac{z^3-z}{z^3+x+y} \geq \dfrac{z-\frac{1}{z}}{x+y+z}$ $\Rightarrow \dfrac{x^3-x}{x^3+y+z}+\dfrac{y^3-y}{y^3+z+x}+\dfrac{z^3-z}{z^3+x+y} \geq \dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+y+z}\dfrac{y-\frac{1}{y}}{x+y+z}+\dfrac{z-\frac{1}{z}}{x+y+z}$ $=\dfrac{(x+y+z)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}{x+y+z}=0\left(do: x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.	0,5 0,25

Chú ý:

1. Học sinh làm đúng đến đâu giám khảo cho điểm đến đó, tương ứng với thang điểm.
2. HS trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo cho điểm tương ứng với thang điểm. Trong trường hợp mà hướng làm của HS ra kết quả nhưng đến cuối còn sai sót thì giám khảo trao đổi với tổ chấm để giải quyết.
3. Tổng điểm của bài thi không làm tròn.

-----------Hết-----------