PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN YÊN BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề gồm 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
Năm học 2022 – 2023

Môn thi: **Toán 9**
Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: **28/11/2022**

Câu 1: *(4,0 điểm)* Cho $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ $(x \geq 0;\ x \neq 1)$

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A với $x = 9 - 4\sqrt{2}$.

c) Chứng minh rằng $A < \frac{1}{3}$.

Câu 2: *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$

b) Giải phương trình nghiệm nguyên: $5x + 22 = -3xy + 9y^2$.

c) Tìm số tự nhiên biết: Nếu số đó cộng thêm 64 đơn vị hoặc bớt đi 35 đơn vị thì ta đều được một số chính phương.

Câu 3: *(5,0 điểm)*

Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên các cạnh BC và AD lần lượt lấy các điểm E và F sao cho CE = AF. Các đường thẳng AE, BF cắt đường thẳng CD theo thứ tự ở M và N.

a) Chứng minh: CM . DN = a^2;

b) Gọi K là giao điểm của NA và MB. Chứng minh: $\widehat{MKN} = 90^o$

c) Các điểm E và F có vị trí như thế nào thì MN có độ dài nhỏ nhất ?

Câu 4: *(4 điểm)*

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

b) Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Câu 5 : *(3 điểm)*

Cho tứ giác ABCD có AC = 10cm, BD = 12cm và góc giữa AC và BD bằng 30^0. Tính diện tích tứ giác ABCD.

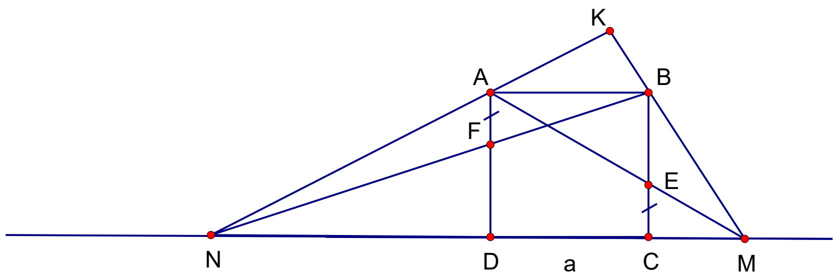
Hết

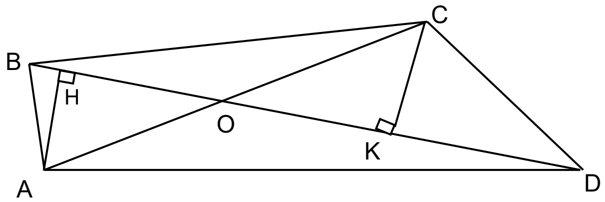
- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu.*
- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh: ………………………. Cán bộ coi thi số 1:…………………
Số báo danh:…………………………….. Cán bộ coi thi số 1:…………………

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
Năm học: 2022 – 2023 - Môn: Toán lớp 9

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	a) Với $x \ge 0; x \ne 1$ ta có: $$A = \frac{x+2}{\sqrt{x^3}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$ $$A = \frac{x+2}{\sqrt{x^3}-1} + \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}-1}$$ $$A = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}-1} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$	0,5 0,5 0,5
	$b)\ x = 9-4\sqrt{2} = (2\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2\sqrt{2}-1$ $\Rightarrow A = \frac{2\sqrt{2}-1}{9-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1+1} = \frac{2\sqrt{2}-1}{9-2\sqrt{2}}$ $A = \frac{-1+16\sqrt{2}}{73}$	0,5 0,5 0,5
	$c)\ A < \frac{1}{3} \Leftrightarrow A - \frac{1}{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{3} < 0$	
	Thật vậy: Với $x \ge 0;\ x \ne 1$ ta có: $\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{x}-(x+\sqrt{x}+1)}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{-(x-2\sqrt{x}+1)}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)} < 0$, Vậy $A < \frac{1}{3}$ (đpcm)	1,0
Câu 2	a) Giải phương trình $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$ Đk x≥ - 1 ⇔ $(\sqrt{x+3}-2x)(\sqrt{x+1}-1) = 0$ ⇔ $\sqrt{x+3}-2x = 0$ hoặc $\sqrt{x+1}-1 = 0$ ⇔ $\sqrt{x+3} = 2x$ ⇔ $\sqrt{x+1} = 1$ ⇔ $x \ge 0$, $x+3 = 4x^2$ ⇔ x = 0 ⇔ x = 1 Vậy tập nghiệm của PT là : S = {0;1}	0,5 0,5 0,5
	b) Ta có: $5x + 22 = -3xy + 9y^2 \Leftrightarrow x = \frac{9y^2-22}{3y+5} = \frac{9y^2-25+3}{3y+5} = 3y - 5 + \frac{3}{3y+5}$	0,5
	Do đó x, y nguyên $\Leftrightarrow 3 \vdots 3y+5 \Leftrightarrow 3y+5 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$ +) 3y+5 = -1 thì y = -2; x = -14	

	+) 3y+5 = 1 thì y = $\frac{-4}{3}$ (loại) +) 3y+5 = -3 thì y = $\frac{-8}{3}$ (loại) +) 3y+5 = 3 thì y = $\frac{-2}{3}$ (loại) Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm (x;y) = (-14; -2)	1,0
	c, Gọi số tự nhiên cần tìm là A. Vậy ta có: $\begin{cases} A+64=k^2 & (k\in N) \\ A-35=t^2 & (t\in N) \end{cases}$ $\Rightarrow k^2 - t^2 = 99 \Leftrightarrow (k-t)(k+t)=99$ Vậy k - t và k + t là ước của 99 và tích hai ước này phải bằng 99, mà: Ư(99) = { 1; 3; 9; 11; 33; 99 }, mặt khác k - t < k + t, nên ta có: $+\begin{cases} k-t=1 \\ k+t=99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=50 \\ t=49 \end{cases}$ $+\begin{cases} k-t=3 \\ k+t=33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=18 \\ t=15 \end{cases}$ $+\begin{cases} k-t=9 \\ k+t=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=10 \\ t=1 \end{cases}$ - Nếu: + k = 50 $\Rightarrow$ A = 2436 + k = 18 $\Rightarrow$ A = 260 + k = 10 $\Rightarrow$ A = 36 Vậy A = { 2436 ; 260 ; 36 }	0,5 0,5
Câu 3		0,5
	a) AB // MN nên $\frac{CM}{AB}=\frac{CE}{BE}=\frac{AF}{FD}=\frac{AB}{DN}$ $\Rightarrow CM.DN = AB^2 = a^2$	1,0 0,5
	b) Theo câu a ta có: $\frac{CM}{AB}=\frac{AB}{DN} \Rightarrow \frac{CM}{CB}=\frac{AD}{DN}$ Và $\widehat{BCM}=\widehat{ADN}=90^0$ Do đó ΔCMB ∽ ΔDAN (c.g.c). nên $\widehat{CMB}=\widehat{DAN}$ Suy ra $\widehat{CMB}+\widehat{DNA}=90^o$. Vậy $\widehat{MKN}=90^o$.	0,5 0,5 0,5
	c) MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ CM + DN nhỏ nhất. Các độ dài CM, DN có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ CM = DN. Khi đó $CM^2 = a^2$, CM = DN = a. Độ dài MN nhỏ nhất bằng 3a	0,5 0,5

	khi và chỉ khi E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, AD.	0,5
Câu 4	Giải: a) $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-6x+9}=\|x\|+\sqrt{(3-x)^2}=\|x\|+\|3-x\|\geq\|x+3-x\|=3$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x.(3-x)\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 3$ Vậy $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-6x+9}$ đạt GTNN bằng 3 khi $0\leq x\leq 3$	1,0 1,0
	b) Áp dụng BĐT Cosi, ta có: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq a;\ \frac{b^2}{a+c}+\frac{a+c}{4}\geq b;\ \frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq c$ Cộng vế với vế của ba bất đẳng trên ta được $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\geq a+b+c$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}\ \ (dpcm)$	1,0 1,0
Câu 5	 - Vẽ AH $\perp$ BD; CK $\perp$ BD (H, K $\in$ BD) - Trong ΔHAO vuông tại H có $\widehat{AOH}=30^0$ $\Rightarrow AH=\frac{1}{2}AO$ (Tính chất tam giác vuông) - Trong ΔCKO vuông tại H có $\widehat{COK}=30^0$ $\Rightarrow CK=\frac{1}{2}CO$ (Tính chất tam giác vuông) - Ta có: $S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}AH.BD+\frac{1}{2}CK.BD=\frac{1}{2}BD\left(AH+CK\right)$ $\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}BD\left(\frac{1}{2}AO+\frac{1}{2}CO\right)=\frac{1}{2}BD.\frac{1}{2}\left(AO+CO\right)$ $\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{4}BD.AC=\frac{1}{4}.12.10=30\ (cm^2)$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

PHÒNG GD&ĐT
YÊN BÌNH

(Đề dự bị)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2022-2023
Môn thi: Toán - Lớp 9
(Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (3,0 điểm)

Cho biểu thức: $A=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right).\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right]:\frac{a-b}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tính giá trị của A khi $a=3+2\sqrt{2}$; $b=3-\sqrt{8}$

Câu 2: (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2+5x-\sqrt{x^2+5x+4}=-2$

2) Tìm tất cả các cặp số (a, b) sao cho $x^4+4x^3+ax^2+bx+1$ là bình phương của một đa thức.

Câu 3: (4,0 điểm)

1) Chứng minh rằng n^3+6n^2+8n chia hết cho 48 với mọi n là số tự nhiên và n chẵn.

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn: $x^2+xy+3x+2y=1$

Câu 4: (2,0 điểm) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\frac{y\sqrt{x-1}+x\sqrt{y-4}}{xy}$

Câu 5: (6,0 điểm)

Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ với tâm O, bán kính R và đường kính AB cố định. Gọi M là điểm di động trên $(\mathscr{C})$ sao cho M không trùng với các điểm A và B. Lấy C là điểm đối xứng của O qua A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt đường thẳng AM tại N. Đường thẳng BN cắt đường tròn $(\mathscr{C})$ tại điểm thứ hai là E. Các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại F.

1) Chứng minh rằng ba điểm A, E, F thẳng hàng.

2) Chứng minh rằng tích AM·AN không đổi.

3) Chứng minh rằng A là trọng tâm của tam giác BNF khi và chỉ khi NF ngắn nhất.

Câu 6: (1,0 điểm)

Tính tổng: $P=\frac{2}{15}+\frac{2}{35}+\frac{2}{63}+...+\frac{2}{399}$

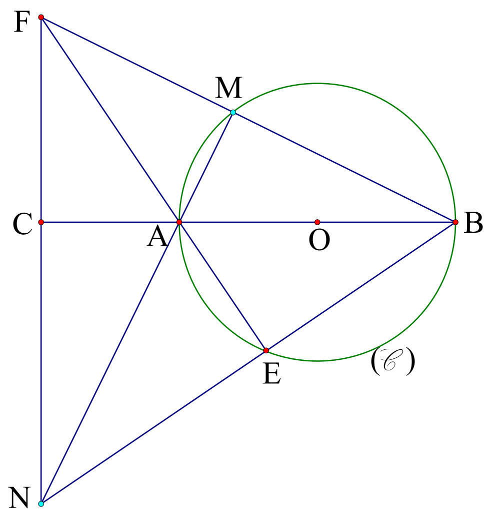
PHÒNG GD&ĐT **YÊN BÌNH**	**HƯỚNG DẪN CHẤM** **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN** Môn thi: TOÁN - LỚP 9 (Đáp án gồm 04 trang)

ĐÁP ÁN ĐỀ DỰ BỊ

Học sinh phải lập luận chi tiết mới cho điểm tối đa.
Học sinh giải cách khác mà vẫn đúng thì cho điểm tối đa theo từng phần tương ứng.

Câu	Nội Dung	Điểm
1	1) ĐKXĐ: a>0; b>0 ; a $\neq$ b Ta có: $A=\left[\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}.\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right]:\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$ $A=(\frac{2}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}):\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ $A=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2.\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $A=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ Vậy $A=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ với a>0; b>0 ; a $\neq$ b	0. 5 0. 5 0.5 0.5
	2) Ta có: $a=3+2\sqrt{2}$; $b=3-\sqrt{8}$ => $\sqrt{a}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\left\|\sqrt{2}+1\right\|=\sqrt{2}+1$ $\sqrt{b}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\left\|\sqrt{2}-1\right\|=\sqrt{2}-1$ Tính được: $\sqrt{ab}=1$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2\sqrt{2}$ Thay vào A ta được: A $=2\sqrt{2}$	0.25 0.25 0.25 0.25
2	1) $x^2+5x-\sqrt{x^2+5x+4}=-2$ ĐKXĐ: $x\le -4$ hoặc $x\ge -1$ $\Leftrightarrow x^2+5x+4-\sqrt{x^2+5x+4}=2$. Đặt $y=\sqrt{x^2+5x+4}$ ($y\ge 0$) ta được: $y^2-y-2=0$ Giải phương trình được: $y_1=-1$ (không thỏa mãn đk); $y_2=2$ (thỏa mãn đk) Với y = 2 ta có $\sqrt{x^2+5x+4}=2$ Giải phương trình được $x_1=0$; $x_2=-5$ (thỏa mãn) Vậy tập nghiệm của phương trình là: S=$\{-5;0\}$	0. 5 0.5 0.5 0.5

	2) Nếu $x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 1$ là bình phương của một đa thức thì đa thức đó phải có bậc 2. Giả sử: $x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 1 = (Ax^2 + Bx + C)^2$ $\Leftrightarrow$ $x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 1 = A^2x^4 + 2ABx^3 + (2AC + B^2)x^2 + 2BCx + C^2$ Đồng nhất hệ số hai vế, ta được: $A^2 = 1; 2AB = 4; 2AC + B^2 = a; 2BC = b; C^2 = 1.$ Không mất tính tổng quát, giả sử A = 1 suy ra B = 2; C=1 hoặc C=-1. Nếu C = 1 thì a = 6, b = 4. Nếu C = -1 thì a = 2, b = -4 Vậy có hai cặp số (a, b) thoả mãn yêu cầu bài toán là (6, 4) và (2, -4)	0.5 0.5 0.5 0.5
3	1) Ta có: $n^3+6n^2+8n=n(n+2)(n+4)$ Vì n chẵn => n = 2k với $k\in N$ => $n^3+6n^2+8n=8k(k+1)(k+2)$ Do $k\in N$ => $k(k+1)(k+2)$ là ba số tự nhiên liên tiếp => $k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 6 => $8k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 48 Vậy n^3+6n^2+8n chia hết cho 48 với mọi n là số tự nhiên và n chẵn.	0.5 0.5 0.5 0.5
	2) Ta có: $x^2+xy+3x+2y=1$ <=> (x+2)(x+y+1) = 3 Do x; y nguyên => x+2 ; x+y+1 có giá trị nguyên. Mà 3=3.1=1.3= (-3).(-1)=(-1).(-3) +) $\begin{cases}x+2=1\\x+y+1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$ +) $\begin{cases}x+2=3\\x+y+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ +) $\begin{cases}x+2=-1\\x+y+1=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}$ +) $\begin{cases}x+2=-3\\x+y+1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=3\end{cases}$ Vậy (x;y) =(-1;3); (1;-1); (-3;-1); (-5;3)	0.5 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25

4	Với điều kiện $x \geq 1, y \geq 4$ ta có: M = $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}+\dfrac{\sqrt{y-4}}{y}$ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm, ta có: $\sqrt{x-1}=\sqrt{1(x-1)} \leq \dfrac{1+x-1}{2}=\dfrac{x}{2}$ $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \dfrac{1}{2}$ Và $\sqrt{y-4}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4(y-4)} \leq \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4+y-4}{2}=\dfrac{y}{4}$ $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{y-4}}{y} \leq \dfrac{1}{4}$ Suy ra: M = $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}+\dfrac{\sqrt{y-4}}{y} \leq \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ Vậy giá trị lớn nhất của M là $\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow$ x = 2; y = 8	0.5 0.5 0.5 0.5
	Cho đường tròn ($\mathscr{C}$) với tâm O, bán kính R và đường kính AB cố định. Gọi M là điểm di động trên ($\mathscr{C}$) sao cho M không trùng với các điểm A và B. Lấy C là điểm đối xứng của O qua A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt đường thẳng AM tại N. Đường thẳng BN cắt đường tròn ($\mathscr{C}$) tại điểm thứ hai là E. Các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại F. 1) Chứng minh rằng ba điểm A, E, F thẳng hàng. 2) Chứng minh rằng tích AM.AN không đổi. 3) Chứng minh rằng A là trọng tâm của tam giác BNF khi và chỉ khi NF ngắn nhất. Vẽ hình đúng 	0.25

5	1) Ta có: MO là trung tuyến của tam giác AMB; $MO=\frac{1}{2}AB$ $\Rightarrow \widehat{AMB}=90^0$ $\Rightarrow MN\perp BF$ và $BC\perp NF$ (gt) $\Rightarrow$ A là trực tâm của tam giác BNF $\Rightarrow FA\perp NB$ Tương tự chứng minh $MN\perp BF$. Ta có: $AE\perp NB$ Vậy ba điểm A, E, F thẳng hàng	0.25 0.5 0.5 0.5
	2) Ta có: $\widehat{CAN}=\widehat{MAB}$ nên hai tam giác ACN và AMB đồng dạng. Suy ra: $\frac{AN}{AB}=\frac{AC}{AM}$ Hay $AM\cdot AN=AB\cdot AC=2R^2$ không đổi.	1.0 1.0
	3) Ta có $BA=\frac{2}{3}BC$ nên A là trọng tâm của tam giác BNF $\Leftrightarrow$ C là trung điểm của NF (3) Mặt khác: $\widehat{CAN}=\widehat{MAB}$ (2 góc đối đỉnh) mà $\widehat{CFM}=\widehat{MAB}$ (cùng phụ với $\widehat{MBA}$) $\Rightarrow \widehat{CAN}=\widehat{CFM}$, nên hai tam giác CNA và CBF đồng dạng $\Rightarrow \frac{CN}{BC}=\frac{AC}{CF} \Rightarrow CN\cdot CF=BC\cdot AC=3R^2$ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $NF=CN+CF\geq 2\sqrt{CN\cdot CF}=2R\sqrt{3}$ không đổi Nên: NF ngắn nhất $\Leftrightarrow$ CN =CF $\Leftrightarrow$ C là trung điểm NF (4) Từ (3) và (4) suy ra: A là trọng tâm tam giác BNF $\Leftrightarrow$ NF ngắn nhất.	0.5 0.5 0.5 0.5
6	$P=\frac{2}{15}+\frac{2}{35}+\frac{2}{63}+...+\frac{2}{399}$ $=\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+\frac{2}{7.9}+...+\frac{2}{19.21}$ $=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}$ $=\frac{1}{3}-\frac{1}{21}$ $=\frac{2}{7}$	0.25 0.25 0.25 0.25