

Câu 1 (5 điểm). Cho $A = \{n \in \mathbb{N} | 2 < n^2 < 38\}$; $B = \{x | x = 3k, k \in \mathbb{Z}, -4 < x < 16\}$;
 $C = \{n^2 + 1 | n \in \mathbb{N}, n < 5\}$.

- a) Tìm các tập hợp $A \cup B$; $A \cap C$; $A \setminus B$.
b) Tìm các tập hợp $(A \setminus B) \cap C$; $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Lời giải.

Ta có: $A = \{2; 3; 4; 5; 6\}$; $B = \{-3; 0; 3; 6; 9; 12; 15\}$; $C = \{1; 2; 5; 10; 17\}$.

- a) $A \cap C = \{2; 5\}$
 $A \cup B = \{-3; 0; 2; 3; 4; 5; 6; 9; 12; 15\}$,
 $A \setminus B = \{2; 4; 5\}$.
b) $A \setminus B = \{2; 4; 5\}$
 $(A \setminus B) \cap C = \{2; 5\}$
 $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

□

Câu 2 (4 điểm). Cho tập hợp $D = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 7\}$, $E = \{x \in \mathbb{R} | x < 4\}$.

Tính $D \cap E$, $D \cup E$, $C_R D$, $C_R E$

Lời giải.

Ta có: $D = [2; 7]$; $E = (-\infty; 4)$

Khi đó ta có: $D \cap E = [2; 4]$; $D \cup E = (-\infty; 7]$; $C_R D = (-\infty; 2) \cup (7; +\infty)$, $C_R E = [4; +\infty)$

□

Câu 3 (2 điểm). Trong một câu lạc bộ có 100 học sinh, gồm 90 học sinh chơi cầu lông, 80 học sinh chơi bóng bàn và 70 học sinh chơi đá bóng. Hỏi có ít nhất bao nhiêu học sinh chơi cả ba môn thể thao?

Lời giải.

Theo đề bài, ta có:

- 10 học sinh không chơi cầu lông, gọi là nhóm 1.
- 20 học sinh không chơi bóng bàn, gọi là nhóm 2.
- 30 học sinh không chơi đá bóng, gọi là nhóm 3.

Một học sinh X trong lớp giỏi cả ba môn sẽ không thuộc vào bất cứ nhóm nào trong các nhóm trên (vì các nhóm trên gồm học sinh KHÔNG giỏi một môn nào đó trong ba môn). Vì thế, để có càng ít học sinh X càng tốt (do cần tìm số học sinh giỏi ba môn ít nhất có thể) thì tổng số học sinh trong các nhóm 1, 2, 3 phải càng nhiều càng tốt. Khi đó, ta xét các nhóm 1, 2, 3 rời nhau hết thì tổng số học sinh trong đó là $10 + 20 + 30 = 60$.

Suy ra có ít nhất $100 - 60 = 40$ học sinh giỏi cả ba môn. $\square$

Câu 4 (3 điểm). Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt heo chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng mỗi ngày gia đình này chỉ mua tối đa 1,5 kg thịt bò và 1 kg thịt heo. Giá tiền 1 kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1 kg thịt heo là 100 nghìn đồng. Hỏi gia đình này cần mua bao nhiêu kg thịt bò và bao nhiêu kg thịt heo để số tiền bỏ ra là ít nhất nhưng vẫn đáp ứng đủ protein và lipit trong thức ăn hàng ngày.

Lời giải.

Gọi x là số kg thịt bò, y là số kg thịt heo mà gia đình mua.

Theo bài ra ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,5 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền đa giác $ABCD$ không gach, kể cả bờ.

Gọi F là số tiền gia đình cần phải trả, khi đó:

$$F = 200x + 100y$$

Ta có tọa độ các đỉnh của đa giác là $A(\frac{3}{8}; 1), B(\frac{3}{5}; \frac{7}{10}); C(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}); D(\frac{3}{2}; 1)$

Thay tọa độ các đỉnh vào F ta có:

$$F(\frac{3}{8}; 1) = 175, F(\frac{3}{5}; \frac{7}{10}) = 190; F(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}) = 325; F(\frac{3}{2}; 1) = 400$$

Vậy gia đình này cần mua $\frac{3}{8}$ kg thịt bò và 1 kg thịt heo để đáp ứng đủ protein và lipit với số tiền ít nhất. $\square$

Câu 5 (4 điểm). Cho phương trình: $(m - 1)x^2 + x - m = 0$ (1)

a) Chứng minh với mọi m thì phương trình luôn có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm thỏa mãn: $x_1 = 2x_2$

Lời giải.

1. TH1: $m = 1$ khi đó ta có: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

TH 2: $m \neq 1$ ta có: $\Delta = 1^2 + 4(m - 1)m = 4m^2 - 4m + 1 = (2m - 1)^2$

Vậy với mọi giá trị m thì phương trình luôn có nghiệm

2. Để phương trình có hai nghiệm thì $m \neq 1$

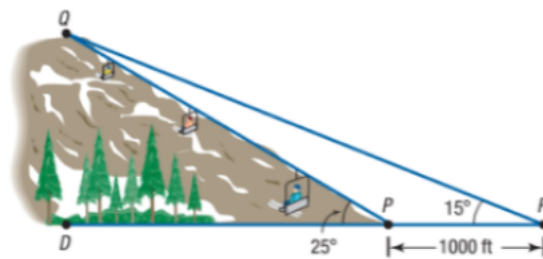
Khi đó ta có hai nghiệm phương trình là $x = 1$ hoặc $x = \frac{-m}{m - 1}$

TH1: $x_1 = 1, x_2 = \frac{-m}{m - 1} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$

TH2: $x_1 = \frac{-m}{m - 1}, x_2 = 1 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

□

Câu 6 (2 điểm). Để xác định chiều cao của một thang trượt tuyết được xác định từ P đến Q (như hình vẽ). Một nhà khảo sát đo lường đã ước tính $\angle DPQ = 25^\circ$, sau đó nhà khảo sát đi bộ ra xa cách vị trí P 1000ft và tiến hành đo được $\angle QRD = 15^\circ$. Tính khoảng cách từ P đến Q theo đơn vị m . Biết rằng $1ft = 0,3048m$, làm tròn đến chữ số hàng đơn vị.



Lời giải.

Gọi chiều cao QD là x (ĐK: $x > 0$)

Do tam giác QPD là tam giác vuông tại D . Áp dụng tỉ số lượng giác ta có:

$$DP = x \cdot \cot 25^\circ$$

. Do tam giác QRD là tam giác vuông tại D . Áp dụng tỉ số lượng giác ta có:

$$DR = x \cdot \cot 15^\circ$$

. Theo bài ra ta có:

$$DR - DP = 1000 \Leftrightarrow x \cdot \cot 15^\circ - x \cdot \cot 25^\circ = 1000 \Leftrightarrow x = \frac{1000}{\cot 15^\circ - \cot 25^\circ}$$

Khi đó ta có: $QP = \frac{x}{\sin 25^\circ} = 1490 \text{ (ft)} = 454m$

□

———— HẾT ————