

**Bài 1. (5,0 điểm)** Cho biểu thức

$$M = \left[ \frac{(a-1)^2}{3a + (a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}.$$

- Rút gọn  $M$ .
- Tìm  $a$  để  $M > 0$ .
- Tìm  $a$  nguyên để  $M$  nhận giá trị nguyên.
- Tìm giá trị của  $a$  để biểu thức  $M$  đạt giá trị lớn nhất.

**Bài 2. (4,0 điểm)**

- Cho  $a, b, c$  đôi một khác nhau thỏa mãn:  $ab + bc + ca = 1$ .

Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}$ .

- Giải phương trình nghiệm nguyên:  $x^2 - 6y^2 + xy + 2y - x - 7 = 0$ .

**Bài 3. (4,0 điểm)**

- Chứng minh rằng:  $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 323$  với mọi số tự nhiên chẵn  $n$ .

- Tìm giá trị lớn nhất của  $B = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$  với mọi số thực  $x$  và  $y$  không đồng thời bằng 0.

**Bài 4. (6,0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  nhọn, các đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại trực tâm  $H$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ , và  $K$  là điểm đối xứng với  $H$  qua  $M$ .

- Tứ giác  $BHCK$  là hình gì? Vì sao?

b) Gọi  $O$  và  $I$  lần lượt là trung điểm  $AK$  và  $AH$ . Chứng minh rằng  $IM$  là trung trực của  $EF$ , từ đó suy ra  $AK$  vuông góc với  $EF$ .

- Qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $AC$  ở  $T$ . Chứng minh rằng góc  $BIT$  là góc vuông.

**Bài 5. (1,0 điểm)** Trên bảng ghi các số 2022, 2023, 2024. Hai bạn Bảo và Đan luân phiên lên bảng lựa chọn hai số  $a, b$  bất kỳ rồi xóa đi hai số vừa chọn và viết lại hai số  $a - (a, b)$  và  $b - (a, b)$ , với  $(a, b)$  là ước chung lớn nhất của  $a$  và  $b$ . Trò chơi kết thúc khi có bạn chiến thắng bằng cách đưa được một số về 0. Biết Bảo đi chơi trước, hãy chỉ ra chiến thuật để Đan là người chiến thắng.