

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài I (5,0 điểm)

1) Giải các phương trình sau :

a) $\sin 2x - 4 \cos x - \sin x + 2 = 0;$

b) $\sin x \cot 2x = \cos 3x.$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{5x + 2y} + \sqrt{2x + y} = 5 \\ \sqrt{2x + y} + x - y = 1 \end{cases}.$$

Bài II (3,0 điểm)

1) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10.$

2) Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5.$

3) Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số trong đó có ít nhất một chữ số 1.

Bài III (4,0 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1, u_{n+1} = 3u_n + 2, \forall n \geq 1.$

1) Chứng minh dãy số $(u_n + 1)$ là một cấp số nhân, tính $u_{50}.$

2) Chứng minh $\frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \dots + \frac{1}{u_{100} + 1} < \frac{3}{4}.$

3) Tìm công thức tổng quát của dãy số $v_1 = 1; v_{n+1} = \frac{v_n}{2v_n + 3}, \forall n \geq 1.$

Bài IV (2,0 điểm) Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x - 1} - \sqrt[3]{3x - 2})}{x - 1}.$

Bài V (6,0 điểm) Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ có các góc $BAD = DAA' = BAA' = 60^\circ$ và tất cả các cạnh bằng $a.$

1) Chứng minh $BA' \perp B'C'$ và tính độ dài cạnh AC' theo $a.$

2) Lấy các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}, \overrightarrow{NB} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}, 2\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC'} = \vec{0}.$

Dựng thiết diện của hình hộp $ABCD A'B'C'D'$ cắt bởi mặt phẳng $(MNP).$

3) Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng $D'B$ tại $I.$ Tính tỷ số $\frac{D'I}{BI}.$

----- **Hết** -----

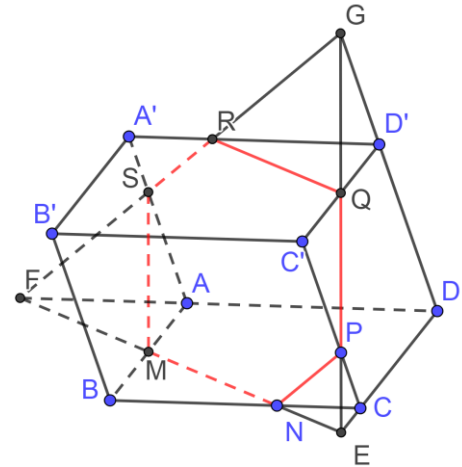
Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

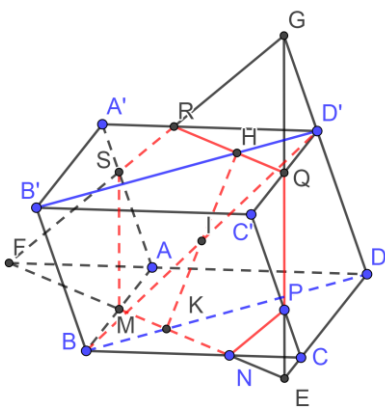
HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Câu	Nội dung	Điểm
1 (5,0đ)	1a	$\sin 2x - 4 \cos x - \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 2)(2 \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 2 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$	1,0
		+) $\sin x = 2(l)$ +) $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$	1,0
	1b	ĐK: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}.$	0,25
	$\sin x \cot 2x = \cos 3x \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos 2x = \cos 3x \cdot \sin 2x$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)$	1,0	
	$\Leftrightarrow \sin 3x = \sin 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3x + k2\pi \\ 5x = \pi - 3x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \end{cases}$	0,5	
		Kết hợp điều kiện $x \neq \frac{k\pi}{2}$ suy ra $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}.$ Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}.$	0,5
2		Đặt $\begin{cases} \sqrt{5x+2y} = a \\ \sqrt{2x+y} = b \end{cases} (a \geq 0, b \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y = a^2 \\ 2x+y = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a^2 - 2b^2 \\ y = 5b^2 - 2a^2 \end{cases}$	0,25
		Khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a+b=5 \\ b+a^2-2b^2-(5b^2-2a^2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b \\ 3(5-b)^2-7b^2+b-1=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b \\ 4b^2+29b-74=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2, a=3 \\ b=-\frac{37}{4}(l) \end{cases}$	0,5
		Với $\Leftrightarrow b=2, a=3 \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y=9 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ Vậy hệ có nghiệm là $(1;2)$	0,25

2 (3,0đ)	1	Điều kiện: $x \in \mathbb{N}, x \geq 3$.	0,25
		ta có	
		$\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.2x(2x-1) - x(x-1) \leq \frac{6}{x} \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + 10$	0,25
		$\Leftrightarrow x(2x-1) - x(x-1) \leq (x-1)(x-2) + 10$	
		$\Leftrightarrow 3x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 4.$	0,25
		Kết hợp điều kiện suy ra $x = 3$ hoặc $x = 4$	0,25
	2	$\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k x^{3k} \left(-\frac{2}{x^2}\right)^{5-k} = \sum_{k=0}^5 C_5^k (-2)^{5-k} x^{5k-10}$	0,5
		Hệ số của x^5 trong khai triển thỏa mãn: $5k - 10 = 5 \Rightarrow k = 3$.	
		Vậy hệ số của x^5 trong khai triển là: $C_5^3 (-2)^2 = 40$	0,5
	3	Gọi số cần tìm là \overline{abcde}	
Số các số tự nhiên có 5 chữ số là: $9 \cdot 10^4$		0,5	
Số các số tự nhiên có 5 chữ số trong đó không có chữ số 1 là: $8 \cdot 9^4$		0,25	
	Số các số tự nhiên có 5 chữ số trong đó có ít nhất 1 chữ số 1 là: $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4 = 37512$ số	0,25	
3 (4,0đ)	1	Ta có: $u_{n+1} + 1 = 3(u_n + 1), \forall n \geq 1$	
		Suy ra $(u_n + 1)$ là cấp số nhân với công bội 2	0,5
		Ta có: $(u_{50} + 1) = 3^{49} \cdot (u_1 + 1) = 2 \cdot 3^{49}$	
		Suy ra $u_{50} = 2 \cdot 3^{49} - 1$	0,5
	2	Ta có $\left(\frac{1}{u_n + 1}\right)$ là cấp số nhân với công bội bằng $\frac{1}{3}$.	0,5
		$\frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \dots + \frac{1}{u_{100} + 1} = \frac{1}{u_1 + 1} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{100} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{2} \frac{3^{100} - 1}{2 \cdot 3^{99}} < \frac{3}{4}$	0,5
	3	$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{2v_n + 3}{v_n} = 2 + \frac{3}{v_n}, \forall n \geq 1$	0,25
Đặt $w_n = \frac{1}{v_n} \rightarrow w_1 = 1; w_{n+1} = 2 + 3w_n, \forall n \geq 1$		0,25	

		Theo câu a suy ra $w_n = 2.3^{n-1} - 1$	0,25
		Vậy $v_n = \frac{1}{2.3^{n-1} - 1}, \forall n \geq 1$	0,25
4 (2,0đ)	1	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2})}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{2x-1} - 1)}{x-1} - \frac{(\sqrt[3]{3x-2} - 1)}{x-1} \right)$	0,5
		$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x-1} - 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1-1}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} \right) = 1.$	0,5
		$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{3x-2} - 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-2-1}{(x-1)(\sqrt[3]{(3x-2)^2} + \sqrt[3]{3x-2} + 1)} \right)$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{(3x-2)^2} + \sqrt[3]{3x-2} + 1} \right) = 1.$	0,5
		$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2})}{x-1} = 0.$	
5 (6,0đ)	1	Ta có : $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD}$ Suy ra $\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{B'C'} = (\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$ Suy ra $BA' \perp B'C'$	0,25 0,25 0,5
		$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$	0,25
		$AC'^2 = \overrightarrow{AC'}^2 = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2$ $= AA'^2 + AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6a^2$ $\Rightarrow AC' = \sqrt{6}a$	0,5 0,5
	2	Gọi giao của MN với CD và AD là E và F	0,5
		Gọi giao của MN với CD và AD là E và F	0,5
		Gọi giao của EP với C'D' và DD' là Q và G	0,5



	<p>Gọi giao của FG với AA' và A'D' là S và R Suy ra thiết diện là lục giác MNPQRS</p>	0,5	
3	<p>Gọi H,K là giao của MN với BD và QR với B'D'</p>		0,25
	<p>Chứng minh tứ giác BKD'H là hình bình hành</p>	0,5	
	<p>Suy ra I là trung điểm của BD' Vậy $\frac{D'I}{BI} = 1$.</p>		