

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG NĂM HỌC 2022 – 2023  
MÔN: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút (Không kể thời gian phát đề)

**Bài 1 (6,0 điểm).**

a) Rút gọn:  $\sqrt{13 - \sqrt{160}} + \sqrt{53 - 4\sqrt{90}}$

b) Chứng minh  $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$  là số nguyên.

c) Giải phương trình:  $8x^2 + \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$

**Bài 2 (3 điểm).** Cho hai đường thẳng:

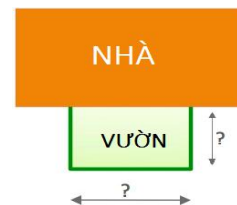
$$(d_1): y = mx - 2m$$

$$(d_2): y = \frac{1}{m}x - \frac{m+1}{m} \quad (\text{với } m \neq 0, m \neq \pm 1)$$

a) Xác định tọa độ giao điểm M của hai đường thẳng trên theo m.

b) Chứng minh khi m thay đổi thì điểm M luôn di động trên một đường thẳng cố định.

**Bài 3 (3,0 điểm).** Ông Huy có 24m hàng rào rất đẹp và muốn rào một sân vườn hình chữ nhật đạt được diện tích lớn nhất. Vườn ngay sát nhà để một cạnh không phải rào. Hỏi kích thước sân vườn đó?



**Bài 4 (2 điểm).** Tứ giác ABCD có độ dài hai đường chéo là m và n. Góc nhọn tạo bởi hai đường chéo là  $\alpha$ . Chứng minh diện tích S của tứ giác ABCD là

$$S = \frac{1}{2}mn \sin \alpha.$$

**Bài 5 (6 điểm).** Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm C nằm giữa A và O. Vẽ đường tròn (O') đường kính CB.

a) Kẻ dây DE của đường tròn (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC. Chứng minh tứ giác ADCE là hình thoi.

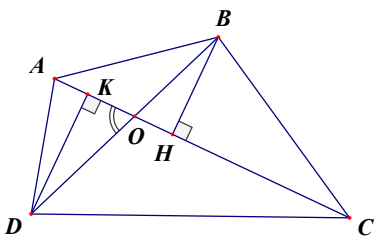
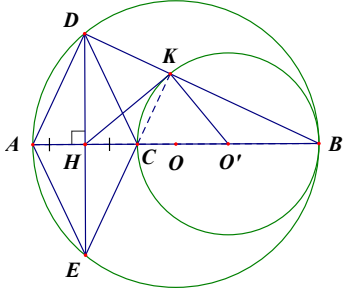
b) Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (O'). Chứng minh ba điểm E, C, K thẳng hàng.

c) Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O').

--HẾT--

**HƯỚNG DẪN CHẤM – THANG ĐIỂM**

| <b>Bài</b> | <b>Nội dung</b>  | <b>Điểm</b>                 |
|------------|--|-----------------------------|
| 1.a        | $\sqrt{13 - \sqrt{160}} + \sqrt{53 - 4\sqrt{90}} = \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3\sqrt{5} - 2\sqrt{2})^2}$ $= 2\sqrt{2} - \sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{5}$  | 1<br>1                      |
| 1.b        | <p>Đặt</p> $a = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}, b = \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$ $\Rightarrow ab = \sqrt[3]{9 - \left(9 + \frac{125}{27}\right)} = -\frac{5}{3}$ <p>Khi đó:</p> $x^3 = 3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}} + 3 - \sqrt{9 + \frac{125}{27}} + 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)x = 6 - 5x$ $\Rightarrow x^3 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 6) = 0 \quad (1)$ <p>Mà: <math>x^2 + x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} &gt; 0 \forall x \in \mathbb{R}</math></p> <p>Nên (1) <math>\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1</math></p> <p>Vậy x là số nguyên</p>                     | 1<br><br>1                  |
| 1.c        | <p>Điều kiện <math>x &gt; 0</math></p> <p>Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được:</p> $8x^2 + \sqrt{\frac{1}{x}} = 8x^2 + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}}$ $\geq 5\sqrt[5]{8x^2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{5}{2}$ <p>Dấu “=” xảy ra <math>\Leftrightarrow 8x^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}</math> (thỏa điều kiện)</p> <p>Vậy nghiệm của phương trình là <math>x = \frac{1}{4}</math></p> | 2                           |
| 2a         | <p>Do <math>m \neq \pm 1 \Rightarrow m \neq \frac{1}{m} \Rightarrow (d_1) \text{ cắt } (d_2)</math></p> <p>Hoành độ điểm M là nghiệm của phương trình</p> $mx - 2m = \frac{1}{m}x - \frac{m+1}{m} \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{m+1} \Rightarrow y = -1 + \frac{1}{m+1}$ <p>Vậy <math>M\left(2 - \frac{1}{m+1}; -1 + \frac{1}{m+1}\right)</math></p>  | 0,25<br><br>1,0<br><br>0,25 |
| 2b         | <p>Ta có:</p> $x + y = 2 - \frac{1}{m+1} - 1 + \frac{1}{m+1} = 1 \Rightarrow y = -x + 1$   | 1,0                         |

| <b>Bài</b> | <b>Nội dung</b>   | <b>Điểm</b>                                |
|------------|---|--|
|            | Do đó M luôn di động trên đường thẳng cố định $y = -x + 1$  | 0,5  |
| 3          | <p>Gọi <math>x</math> (m) là cạnh khu vườn không song song với tường nhà.<br/> Điều kiện: <math>0 &lt; x &lt; 12</math><br/> Cạnh còn lại của khu vườn là <math>24 - 2x</math> (m)<br/> Ta có diện tích khu vườn:<br/> <math>S = x(24 - 2x) = 72 - 2(x - 6)^2 \leq 72</math><br/> Do đó <math>\max S = 72</math> khi <math>x = 6 \Rightarrow</math> cạnh còn lại là <math>24 - 2.6 = 12</math>(m)<br/> Vậy kích thước của khu vườn là 6m và 12m.</p>                              | 0,25<br>0,25<br>0,25<br>0,5<br>0,5<br>0,25 |
|            |   |  |
| 4          | <p>Kẻ <math>BH \perp AC, DK \perp AC</math>. Ta có:<br/> <math>\Delta HOB, \widehat{H} = 90^\circ : BH = OB \cdot \sin \alpha</math><br/> <math>\Delta OKD, \widehat{K} = 90^\circ : DK = OD \cdot \sin \alpha</math><br/> <math>S = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC(BH + DK) = \frac{1}{2} AC(OB + OD) \sin \alpha</math><br/> <math>= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} mn \sin \alpha</math><br/> Vậy <math>S = \frac{1}{2} mn \sin \alpha</math></p> | 1,0<br><br>1,0                             |
|            |    |  |
| 5a         | <p>+ ABCD là hình bình hành: có <math>AH = HC, DH = HE</math><br/> + Hình bình hành ABCD có <math>DE \perp AC</math> nên là hình thoi</p>   | 0,75<br>0,75                               |
| 5b         | <p>+ <math>CK \perp DB, AD \perp DB \Rightarrow CK \parallel AD</math><br/> + ABCD là hình thoi <math>\Rightarrow EC \parallel AD</math><br/> Qua C có <math>CK \parallel AD, CE \parallel AD \Rightarrow</math> hai đường thẳng CK, CE trùng nhau (Tiên đề Ô-clit)<br/> Vậy ba điểm E, C, K thẳng hàng</p>   | 0,5<br>0,5<br>1<br>0,5                     |

| <b>Bài</b> | <b>Nội dung</b>   | <b>Điểm</b>  |
|------------|---|--|
| 5c         | $+ \Delta CKO'$ cân tại $O' \Rightarrow \widehat{CKO'} = \widehat{KCO'} \dots(1)$<br>$+ \widehat{KCO'} = \widehat{HCE}$ (đối đỉnh) $\dots(2)$<br>$+ \Delta HKE$ cân tại $H \Rightarrow \widehat{HKC} = \widehat{HEC} \dots(3)$<br>$+ \Delta HEC, \widehat{H} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HEC} + \widehat{HCE} = 90^\circ \dots(4)$<br>Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \widehat{HKC} + \widehat{CKO'} = 90^\circ \Rightarrow HK \perp O'K$<br>Vậy HK là tiếp tuyến của $(O')$ | <br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>1,0<br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>1,0 |