

Câu I. (2,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{27} + 7\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.
2. Cho biểu thức $P = \frac{1}{2\sqrt{x}-4} - \frac{1}{2\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}}{x-4}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$).
 - a) Rút gọn biểu thức P .
 - b) Tìm tất cả các số nguyên x để P đạt giá trị nguyên.

Câu II. (1,5 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 + 2x - 15 = 0$.
2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(4-2y) = 7+y-2xy \\ 2x-14 = 2(y-3) \end{cases}$$

Câu III. (1,5 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$, đường thẳng (d) có phương trình $y = 2x + m^2 - 4m + 9$ (với m là tham số) và đường thẳng (Δ) có phương trình $y = (a-3)x + 4$ (với a là tham số).

1. Tìm a để đường thẳng (d) và đường thẳng (Δ) vuông góc với nhau.
2. Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m . Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ (với $x_1 < x_2$), tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho $|x_1 - 2023| - |x_2 + 2023| = y_1 + y_2 - 48$.

Câu IV. (4,0 điểm) Cho đường tròn (O) . Từ điểm M bên ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Lấy điểm C trên cung nhỏ AB (C không nằm chính giữa cung AB , C khác A và B). Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên các đường thẳng AB, AM, BM .

1. Chứng minh tứ giác $AECD$ nội tiếp đường tròn.
2. Chứng minh rằng $\widehat{CDE} = \widehat{CFD}$.
3. Gọi I là giao điểm của AC và ED , K là giao điểm của CB và DF . Chứng minh $CD \perp IK$.
4. Đường tròn ngoại tiếp hai tam giác CIE và CKF cắt nhau tại điểm thứ hai N (N khác C). Chứng minh đường thẳng NC đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB .

Câu V. (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a + b + c = 1011$. Chứng minh:

$$\sqrt{2022a + \frac{(b-c)^2}{2}} + \sqrt{2022b + \frac{(c-a)^2}{2}} + \sqrt{2022c + \frac{(a-b)^2}{2}} \leq 2022\sqrt{2}.$$

--- HẾT ---

Thí sinh được sử dụng máy tính bỏ túi không có chức năng soạn thảo văn bản và không có thể nhớ.