

Đáp án môn Toán – Kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 Thành phố Hà Nội

Câu I:

1) Thay $x = 9$ vào A ta được: $A = \frac{9+2}{\sqrt{9}} = \frac{11}{3}$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \frac{3-\sqrt{x}}{x-1} \quad (x > 0, x \neq 1) \\ &= \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{3-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2x-3\sqrt{x}+2\sqrt{x}-3+3-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ (điều phải chứng minh)

3) Để $A.B = 4 \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 4 \Leftrightarrow \frac{(x+2).2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = 4 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow x+2 = 2(\sqrt{x}+1)$

$$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{loại vì } x > 0) \\ x = 4 (\text{thoả mãn}) \end{cases}$$

Vậy với $x = 4$ thì $A.B = 4$.

Câu II:

1) Gọi số sản phẩm mỗi ngày phân xưởng làm được theo kế hoạch là x (sản phẩm, $x \in \mathbb{Z}^*$)

Thời gian phân xưởng hoàn thành 900 sản phẩm theo kế hoạch là $\frac{900}{x}$ (ngày)

Thực tế mỗi ngày phân xưởng làm được: $x + 15$ (sản phẩm)

Đáp án môn Toán – Kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 Thành phố Hà Nội

Thời gian thực tế phân xưởng hoàn thành 900 sản phẩm là $\frac{900}{x+15}$ (ngày)

Vì thực tế phân xưởng xong trước kế hoạch 3 ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{900}{x} - \frac{900}{x+15} = 3$$

$$\Leftrightarrow 900(x+15) - 900x = 3x(x+15)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 15x - 4500 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 75x - 60x - 4500 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+75) - 60(x+75) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+75)(x-60) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -75(\text{loại}) \\ x = 60(\text{thoaman}) \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng phải làm 60 sản phẩm.

2) Thể tích của khối gỗ là: $\pi \cdot 30^2 \cdot 120 = \pi \cdot 900 \cdot 120 \approx 339120(\text{cm}^3)$

Vậy thể tích của khối gỗ đó khoảng 339120cm^3 .

Câu III:

1) Ta có: $\begin{cases} \frac{2}{x-3} - 3y = 1 \\ \frac{3}{x-3} + 2y = 8 \end{cases} (I), ĐKXĐ: x \neq 3$

Đặt $\frac{1}{x-3} = a (a \neq 0)$

Hệ (I) trở thành: $\begin{cases} 2a - 3y = 1 \\ 3a + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 6y = 2 \\ 9a + 6y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a = 26 \\ y = \frac{2a-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(\text{thoaman}) \\ y = 1 \end{cases}$

Với $a = 2 \Rightarrow \frac{1}{x-3} = 2 \Leftrightarrow x - 3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}(\text{thoaman})$

Đáp án môn Toán – Kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 Thành phố Hà Nội

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\frac{7}{2}, 1\right)$

$$2) (P): y = x^2; (d): y = (m + 2)x - m$$

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2 = (m + 2)x - m$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m + 2)x + m = 0(1)$$

$$\text{Xét } \Delta = (m + 2)^2 - 4m = m^2 + 4m + 4 - 4m = m^2 + 4 > 0 \forall m$$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

$\Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 - 2} (*)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \\ x_1 + x_2 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 \neq 0 \\ x_1 + x_2 \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m + 2 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$$

$$(*) \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 - 2}$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 + x_2 - 2) - x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 2)(m + 2 - 2) - m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m + 2) - m = 0$$

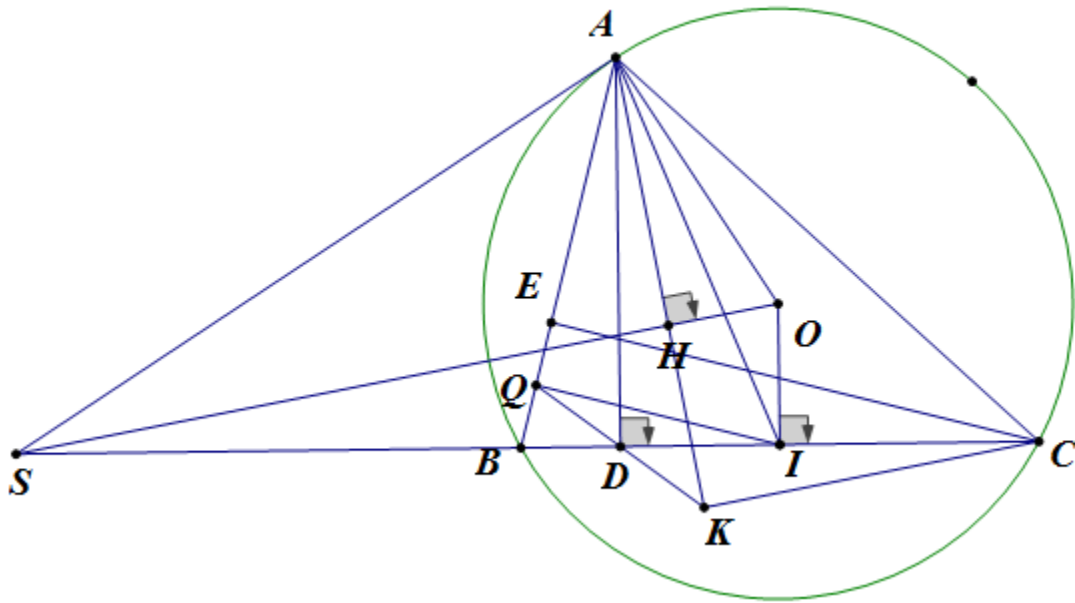
$$\Leftrightarrow m^2 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0(\text{loại}) \\ m = -1(\text{thoả mãn}) \end{cases}$$

Đáp án môn Toán – Kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 Thành phố Hà Nội

Vậy $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu IV. 1. Chứng minh tứ giác $SAOI$ nội tiếp



Ta có: $\widehat{OAS} = 90^\circ$ (SA là tiếp tuyến)

$$\widehat{OIS} = 90^\circ (OI \perp SC)$$

Xét tứ giác $SAOI$ có: $\widehat{OAS} + \widehat{OIS} = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

Nên tứ giác $SAOI$ nội tiếp.

2. Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$

Vì tứ giác $SAOI$ nội tiếp nên $\widehat{AOS} = \widehat{AIS}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung SA) (1)

Mà $\widehat{OAH} + \widehat{AOS} = 90^\circ$ (tam giác AHO vuông tại H) (2)

Đáp án môn Toán – Kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 Thành phố Hà Nội

$$\widehat{AIS} + \widehat{IAD} = 90^\circ \text{ (tam giác } IAD \text{ vuông tại } D) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.

3. Chứng minh $BQ \cdot BA = BD \cdot BI$

Xét (O) có OI vuông BC nên I là trung điểm BC (quan hệ đường kính dây cung)

Xét tam giác BEC có: IQ là đường trung bình tam giác BEC nên $IQ \parallel EC$

Mà EC vuông AB (đường cao) nên IQ vuông AB

Xét tam giác ABD và tam giác IBQ có:

$$\widehat{ADB} = \widehat{IQB} (= 90^\circ)$$

Góc ABI chung

$$\text{Khi đó: } \triangle ABD \sim \triangle IBQ (g.g) \Rightarrow \frac{BA}{BI} = \frac{BD}{BQ} \Rightarrow BA \cdot BQ = BI \cdot BD$$

*Chứng minh $SO \parallel KC$

$$\widehat{BAI} = \widehat{BDQ} = \widehat{KDC}$$

Chứng minh: $\widehat{BAI} = \widehat{KAC}$

$$\widehat{BAI} = \widehat{BAD} + \widehat{DAI}$$

$$\widehat{KAC} = \widehat{OAC} + \widehat{KAO}$$

$$\widehat{DAI} + \widehat{DIA} = 90^\circ$$

$$\widehat{KAO} + \widehat{AOS} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{DIA} = \widehat{AOS} \Rightarrow \widehat{DIA} = \widehat{KAO}$$

Đáp án môn Toán – Kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 Thành phố Hà Nội

Mặt khác: $\widehat{BAD} = \widehat{OAC}$ nên $\widehat{BAI} = \widehat{KAC}$

$\Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{KDC} \Rightarrow$ tứ giác ADKC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AKC} = \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow CK \perp AK \Rightarrow CK // SO$ (đpcm).

Câu V.

Ta có: $\begin{cases} 4 \geq (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab \\ a, b > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < ab \leq 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\Leftrightarrow a^2(b^2 + a) + b^2(a^2 + b) \leq (a^2 + b)(b^2 + a)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2b^2 + a^3 + b^3 \leq a^2b^2 + a^3 + b^3 + ab$$

$$\Leftrightarrow ab(ab - 1) \leq 0 \text{ Đúng vì } 0 < ab \leq 1 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = 1$.