

Bài 1: (4 điểm)

Cho $P = \frac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2} + \frac{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}$ (với $x \geq 0$, $x \neq 1$ và $x \neq 4$)

- 1) Rút gọn biểu thức P;
- 2) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên và lớn nhất;
- 3) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$.

Bài 2: (3 điểm)

- 1) Giải phương trình sau: $4x^2 + 3x + 3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$.
- 2) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2022x - 2023y - 2024 = 0$.

Bài 3: (4 điểm)

- 1) Xác định hệ số hữu tỉ a, b để $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x + 1$.
- 2) Cho các số nguyên x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = (x - y)(y - z)(z - x)$.
CMR: $M = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ chia hết cho 81;
- 3) Tìm các số tự nhiên n để $B = (n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố.

Bài 4: (7 điểm)

Cho ΔABC nhọn có $AB < AC$, đường cao AM, BD, CE cắt nhau tại H.

- 1) Chứng minh rằng: $\frac{S_{\Delta DEH}}{S_{\Delta ABC}} = \cos^2 A$;
- 2) Biết $AH = k.HM$. Chứng minh: $\tan B \cdot \tan C = k + 1$;
- 3) Gọi I là trung điểm của BC, K là điểm đối xứng với H qua I, xác định tâm O đường tròn đi qua 4 điểm A, B, K, C;
- 4) Chứng minh $OI \parallel AH$;
- 5) Gọi G là trọng tâm ΔABC , chứng minh O, H, G thẳng hàng.

Bài 5: (2 điểm)

Cho hai số x, y thỏa mãn điều kiện $(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$.

.....Hết.....