

Câu 1 (4.5 điểm).

1.1. Một khúc sông rộng khoảng 240 m. Một chiếc thuyền dự định chèo qua sông theo hướng vuông góc với hai bờ nhưng do nước chảy siết, chiếc thuyền bị dòng nước đẩy nên phải chèo khoảng 480 m mới tới bờ bên kia (hình minh họa ở bên). Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc thuyền đi một góc bao nhiêu độ?



1.2. Cho biểu thức $P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Chứng minh $P > 4$.

b) Với giá trị nào của x thì biểu thức $\frac{6}{P}$ nhận giá trị nguyên?

Câu 2 (3.5 điểm).

2.1. Một nhóm bạn trẻ cùng tham gia khởi nghiệp và dự định góp vốn là 240 triệu đồng, số tiền góp mỗi người là như nhau. Nếu có thêm 2 người tham gia cùng thì số tiền mỗi người góp giảm đi 4 triệu đồng. Hỏi nhóm bạn trẻ đó có bao nhiêu người?

2.2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - xy + y^2 = x^2y^2$.

Câu 3 (3.5 điểm).

3.1. Tất Minh là một học sinh khuyết tật nhưng luôn nỗ lực, cố gắng vươn lên trong học tập với nhiều thành tích ấn tượng. Câu chuyện bạn Minh Hiếu suốt 10 năm công Tất Minh đi học không kể nắng mưa, cuối cùng cả hai bạn đều trở thành học sinh giỏi tỉnh và thi tốt nghiệp trên 28 điểm đã để lại cho đời một tình bạn đẹp giữa đời thường.

Quãng đường Minh Hiếu công bạn từ nhà đến trường gồm một đoạn lên dốc dài 1 km, đoạn xuống dốc dài 1,5 km. Minh Hiếu công bạn từ nhà đến trường mất $\frac{11}{20}$ giờ và công bạn từ trường về nhà mất $\frac{23}{40}$ giờ. Biết vận tốc lúc lên dốc và xuống dốc của bạn Minh Hiếu là không đổi, tính vận tốc khi Minh Hiếu công bạn lúc lên dốc và lúc xuống dốc.

3.2. Tìm ba số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 7 lần tổng của chúng.

Câu 4 (5.5 điểm).

4.1. Trong giờ học Toán, thầy giáo có bài toán: Cho hai số x, y không âm. So sánh $\frac{x^3+y^3}{2}$ và

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$. Sau một thời gian làm bài, bạn A và B có kết luận như sau:

Bạn A: $\frac{x^3 + y^3}{2} \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^3$

Bạn B: $\frac{x^3 + y^3}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^3$.

Thầy giáo đọc lời giải của hai bạn và nói "*Kết quả của bạn B đúng*". Sử dụng những kiến thức toán mà em đã học, hãy chứng minh kết quả của bạn B đúng.

4.2. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm M , trên cạnh CD lấy điểm N . Tia AM cắt đường thẳng CD tại K . Kẻ AI vuông góc với AK cắt CD tại I .

a) Chứng minh: $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2}$

b) Biết $\widehat{MAN} = 45^\circ$, $CM + CN = 14 \text{ cm}$, $CM - CN = 2 \text{ cm}$. Tính diện tích tam giác AMN .

Câu 5 (3.0 điểm).

5.1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$.

5.2. Cho các số thực a, b, c và đa thức $g(x) = x^3 + ax^2 + x + 10$ có ba nghiệm phân biệt. Biết rằng mỗi nghiệm của đa thức $g(x)$ lại là nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c$. Tính giá trị của $f(1)$.

..... Hết.....