

Bài I (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4} - \frac{x-x\sqrt{x}-6}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x+39}{x+3\sqrt{x}-10}$ (với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$).

a) Rút gọn Q .

b) Tìm x để Q đạt giá trị nhỏ nhất.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - y(x^2 - x - 1) = x^2 - x \\ y(x^2 + 1) - x^3 + x^2 = 2. \end{cases}$$

Bài II (4,0 điểm)

1) Cho đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $P(2021) \cdot P(2022) = 2023$. Chứng minh rằng đa thức $P(x) - 2024$ không có nghiệm nguyên.

2) Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 69x + 27} = \sqrt{x^2 + 96x + 2}$.

3) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 5n$ chia hết cho 6.

Bài III (4,0 điểm)

1) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3xy$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{x^3 + y^3}{16z} \geq \frac{7}{8}.$$

2) Tìm các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $\frac{a-b\sqrt{2023}}{b-c\sqrt{2023}}$ là số hữu tỷ và $a^2 + b^2 + c^2$ là số nguyên tố.

Bài IV (6,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC có đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB ; S, R, Q lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC . Chứng minh rằng chín điểm $D, E, F, M, N, P, S, R, Q$ cùng nằm trên một đường tròn.

2) Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao điểm của AB và CD , F là giao điểm của AD và BC . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác EBC, FCD, EAD, FAB đồng quy.

3) Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC , (I) tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh các đường thẳng AM, EF, DI đồng quy.

Bài V (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{10-x} = x^2 - 12x + 40$.

2) Cho đa giác đều có 2023 đỉnh sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay trong khi làm bài. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....
Chữ kí cán bộ coi thi thứ nhất.....Chữ kí cán bộ coi thi thứ hai