

Câu 1. (4,5 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \left(x\sqrt{x} + 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

a, Rút gọn biểu thức P

b, Tìm x để $P \leq \frac{3}{2}$

2. Cho $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$

Câu 2. (4,5 điểm)

a, Giải phương trình: $a_1, 3\sqrt{x+4} = -2x^2 - 3x + 6.$

$$a_2, (2x-4)\sqrt{x(x+3)} + x^3 + x^2 - 14x + 16 = 0.$$

b, Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2} - 2x$

Câu 3. (4,0 điểm)

a, Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì: $n^3 + 3n^2 + 2024n$ chia hết cho 6

b, Tìm số tự nhiên n sao cho: $3^n + 19$ là số chính phương

c, Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

Câu 4. (5,5 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2a$. Lấy điểm M bất kì trên đoạn thẳng AB (không trùng với A và B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ hai tia Mx, My sao cho $\widehat{AMx} = \widehat{BMy} = 30^\circ$. Tia Mx và tia My cắt nửa đường tròn tâm O lần lượt tại E và F . Gọi P, Q theo thứ tự là hình chiếu của điểm E, F trên AB .

a, Giả sử $EF = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc EOF

b, Cho $AM = \frac{a}{2}$. Tính diện tích hình thang $EPQF$ theo a

c, Chứng minh rằng khi M di động trên đoạn thẳng AB , điểm O luôn cách đường thẳng EF một khoảng không đổi.

Câu 5. (1,5 điểm)

Cho tam giác ABC , O là giao điểm của ba đường phân giác. Qua O kẻ đường thẳng bất kỳ cắt hai cạnh AB, AC tại M, N . Giả sử điểm O cố định và khoảng cách từ O đến cạnh AB của tam giác ABC bằng 1cm . Xác định dạng của tam giác ABC và vị trí của đường thẳng MN để diện tích tam giác AMN đạt giá trị nhỏ nhất.