

Câu 1 (4,0 điểm):

1.1. Cho biểu thức: $P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2}) + \frac{9\sqrt{x}+14}{x+3\sqrt{x}+2}$; với $x \geq 0$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm các giá trị của x để P là số tự nhiên.

1.2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 5$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$
chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a}}{a+2} + \frac{\sqrt{b}}{b+2} + \frac{\sqrt{c}}{c+2} = \frac{4}{\sqrt{(a+2)(b+2)(c+2)}}$

Câu 2 (2,0 điểm). Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số, lấy ngẫu nhiên 1 số từ tập S. Tính xác suất để lấy được là số chính phương không vượt quá 2022.

Câu 3 (2,0 điểm): Trên quãng đường AB dài 20 km, tại cùng một thời điểm, bạn An đi bộ từ A đến B và bạn Bình đi bộ từ B đến A. Sau 2 giờ kể từ lúc xuất phát, An và Bình gặp nhau tại C và cùng nghỉ tại C 15 phút (vận tốc của An trên quãng đường AC không thay đổi, vận tốc của Bình trên quãng đường BC không thay đổi). Sau khi nghỉ, An đi tiếp đến B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc của An trên quãng đường AC là 1 km/h, Bình đi tiếp đến A với vận tốc lớn hơn vận tốc của Bình trên quãng đường BC là 1 km/h. Biết rằng An đến B sớm hơn so với Bình đến A là 48 phút. Hỏi vận tốc của An trên quãng đường AC là bao nhiêu ?

Câu 4 (2,0 điểm):

a) Cho $x \cdot y = 1$ và $x > y$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 2\sqrt{2}$

b) Cho các số thực dương a, b sao cho: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$.

Chứng minh: $Q = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2a^2b} \leq \frac{1}{2}$

Câu 5 (2,0 điểm):.

a) Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 9

b) Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $(x - 2018)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y$

Câu 6 (2,0 điểm): Cho phương trình $2021x^2 - (m - 2022)x - 2023 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\sqrt{x_1^2 + 2022} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2022} + x_2.$$

Câu 7 (6,0 điểm):

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm BC

a) Chứng minh tứ giác $DMEF$ là tứ giác nội tiếp

b) Đường tròn tâm I đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P .

Kẻ đường kính AK của đường tròn (O) . Chứng minh bốn điểm P, H, M, K thẳng hàng

c) Các tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (I) cắt nhau ở N . Chứng minh ba đường thẳng MN, EF, AH đồng quy

.....HẾT.....

