

(Đề thi có 01 trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{a + \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}} \right)$, ($a, b > 0; a \neq b$).

2) Phương trình $x^2 - 3x - 5 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Đặt $g(x) = x^2 - 4$. Tính giá trị của biểu thức $T = g(x_1) \cdot g(x_2)$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x} = 9x^2 - 36x + 38$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3} + 1) \\ x^2y - 5x^2 + 7(x+y) - 4 = 6\sqrt{xy-x+1} \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

1) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $x^2 = 9y^2 + 6y + 16$.

2) Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và $3c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng $8c+1$ là số chính phương.

Câu 4. (6,0 điểm)

1) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Trên tia đối của tia AB lấy điểm M kẻ các tiếp tuyến ME, MF với đường tròn (O') , trong đó E, F thuộc đường tròn (O') và điểm F nằm trong đường tròn (O) . Hai đường thẳng AE và AF cắt đường tròn (O) lần lượt tại P và Q (P, Q khác A). Tia EF cắt PQ tại K .

a) Chứng minh $BKPE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi I và J lần lượt là giao điểm của AB với OO' và EF . Chứng minh $\widehat{IJE} = \widehat{IFM}$.

c) Chứng minh $PQ = 2\sqrt{OA^2 - OK^2}$.

2) Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 2R$. Gọi M là điểm di động trên nửa đường tròn ($M \neq B; M \neq C$). Kẻ MH vuông góc với BC , ($H \in BC$). Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác MCH và MBH . Xác định vị trí điểm M để chu vi tam giác O_1HO_2 lớn nhất.

Câu 5. (3,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} - \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c}.$$

2) Biết rằng mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà có ba đỉnh và trọng tâm của nó cùng màu.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HỌC SINH GIỎI TỈNH 9 - BN 2023-2024

⚡ BÀI 1

(4,0 điểm)

- Rút gọn $P = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{a + \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}} \right)$ với $a, b > 0; a \neq b$.
- Phương trình $x^2 - 3x - 5 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Đặt $g(x) = x^2 - 4$. Tính giá trị của biểu thức $T = g(x_1) \cdot g(x_2)$.

💬 Lời giải.

- Với $a, b > 0; a \neq b$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{a + \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{1}{\sqrt{a}}$ với $a, b > 0; a \neq b$.

- Vì phương trình $x^2 - 3x - 5 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 nên

$$\begin{cases} x_1^2 - 3x_1 - 5 = 0 \\ x_2^2 - 3x_2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - 4 = 3x_1 + 1 \\ x_2^2 - 4 = 3x_2 + 1 \end{cases}$$

đồng thời theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$. Từ đó

$$\begin{aligned} g(x_1)g(x_2) &= (x_1^2 - 4)(x_2^2 - 4) = (3x_1 + 1)(3x_2 + 1) \\ &= 3(x_1 + x_2) + 9x_1 x_2 + 1 \\ &= 3 \cdot 3 + 9 \cdot (-5) + 1 = -35 \end{aligned}$$

Vậy $g(x_1)g(x_2) = -35$.



BÀI 2

(4,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x} = 9x^2 - 36x + 38$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3} + 1) \\ x^2y - 5x^2 + 7(x+y) - 4 = 6\sqrt[3]{xy-x+1} \end{cases}$.

Lời giải.

1. Xét phương trình $\sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x} = 9x^2 - 36x + 38$ (1). Điều kiện $\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$.

Áp dụng BDT Cauchy-Schwarz, ta có

$$VT_{(1)}^2 = (\sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x})^2 \leq 2(3x-5+7-3x) = 4 \Rightarrow VT_{(1)} \leq 2$$

Mặt khác $VP_{(1)} = 9x^2 - 36x + 38 = 9(x-2)^2 + 2 \geq 2$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow VT_{(1)} = VP_{(1)} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x-5} = \sqrt{7-3x} \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn ĐK)}.$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

2. Xét hệ (I) $\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3} + 1) & (i) \\ x^2y - 5x^2 + 7(x+y) - 4 = 6\sqrt[3]{xy-x+1} & (ii) \end{cases}$. Điều kiện $\begin{cases} y \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$ (*).

Đầu tiên, ta thấy rằng $x = y = 0$ không thỏa mãn (i). Khi x, y không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn (*), ta có

$$\begin{aligned} (i) &\Leftrightarrow (\sqrt{x+y} - \sqrt{2y}) + [x(x+y) - 2y^2] = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+y-2y}{\sqrt{x+y} + \sqrt{2y}} + (x-y)(x+2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{2y}} + x+2y \right)}_{>0} = 0 \\ &\Leftrightarrow x-y=0 \text{ hay } x=y. \end{aligned}$$

Thay vào (ii), ta có

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 + 14x - 4 &= 6\sqrt[3]{x^2-x+1} \\ \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 11x - 7 &= 3 \left[2\sqrt[3]{x^2-x+1} - (x+1) \right] \\ \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 11x - 7 &= 3 \cdot \frac{8(x^2-x+1) - (x+1)^3}{4\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2} + 2(x+1)\sqrt[3]{x^2-x+1} + (x+1)^2} \\ \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 11x - 7 &= 3 \cdot \frac{-(x^3 - 5x^2 + 11x - 7)}{4\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2} + 2(x+1)\sqrt[3]{x^2-x+1} + (x+1)^2} \\ \Leftrightarrow (x^3 - 5x^2 + 11x - 7) &\left[1 + \underbrace{\frac{3}{4\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2} + 2(x+1)\sqrt[3]{x^2-x+1} + (x+1)^2}}_{>0 \text{ do } x \geq 0} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 11x - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) [(x-2)^2 + 3] &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)} &\Rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (1; 1)$.





BÀI 3

(3,0 điểm)

1. Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $x^2 = 9y^2 + 6y + 16$.
2. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a - b$ là số nguyên tố và $3c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh $8c + 1$ là số chính phương.

Lời giải.

1. Ta có

$$\begin{aligned} x^2 &= 9y^2 + 6y + 16 \\ \Leftrightarrow x^2 - (3y + 1)^2 &= 15 \\ \Leftrightarrow (x + 3y + 1)(x - 3y - 1) &= 15 (*) \end{aligned}$$

Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $\begin{cases} x + 3y + 1, x - 3y - 1 \in \mathbb{Z} \\ x + 3y + 1 \geq 1 \\ (x + 3y + 1) - (x - 3y - 1) = 6y + 2 \geq 2 \end{cases}$, do đó từ (*) suy ra

$$\begin{cases} x + 3y + 1 = 15 \\ x - 3y - 1 = 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x + 3y + 1 = 5 \\ x - 3y - 1 = 3 \end{cases}.$$

- Với $\begin{cases} x + 3y + 1 = 15 \\ x - 3y - 1 = 1 \end{cases}$, giải ra được $x = 8$ và $y = 2$ (thỏa mãn).
- Với $\begin{cases} x + 3y + 1 = 5 \\ x - 3y - 1 = 3 \end{cases}$, giải ra được $x = 4$ và $y = 0$ (thỏa mãn).

Vậy các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu là $(x; y) \in \{(8; 2), (4; 0)\}$.

2. Ta có

$$3c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow 4c^2 = ab + bc + ca + c^2 \Leftrightarrow (2c)^2 = (a + c)(b + c) (**)$$

Gọi $(a + c, b + c) = d$. Khi đó $a - b = (a + c) - (b + c) : d$, mà $a - b$ là số nguyên tố nên $d = 1$ hoặc $d = a - b$.

- Nếu $d = 1$ thì từ (**) suy ra $\begin{cases} a + c = x^2 \\ b + c = y^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{N}^*; xy = 2c; x > y)$. Lúc này

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2 = a - b \text{ là số nguyên tố} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a - b + 1}{2} \\ y = \frac{a - b - 1}{2} \end{cases}$$

Từ đó $2c = xy = \frac{a - b + 1}{2} \cdot \frac{a - b - 1}{2} = \frac{(a - b)^2 - 1}{4} \Rightarrow 8c + 1 = (a - b)^2$ là số chính phương.

- Nếu $d = a - b$ thì từ (**) suy ra $\begin{cases} a + c = (a - b)x^2 \\ b + c = (a - b)y^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{N}^*; (a - b)xy = 2c; x > y)$.



Lúc này

$$\begin{aligned}(a+c)-(b+c) &= (a-b)(x^2-y^2) \Leftrightarrow a-b = (a-b)(x^2-y^2) \\ &\Leftrightarrow x^2-y^2 = 1 \text{ (do } a-b > 0) \\ &\Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 1 \\ &\Leftrightarrow x=1; y=0 \Rightarrow b+c=0 \text{ (loại)}\end{aligned}$$

Vậy $8c+1$ là số chính phương.

□

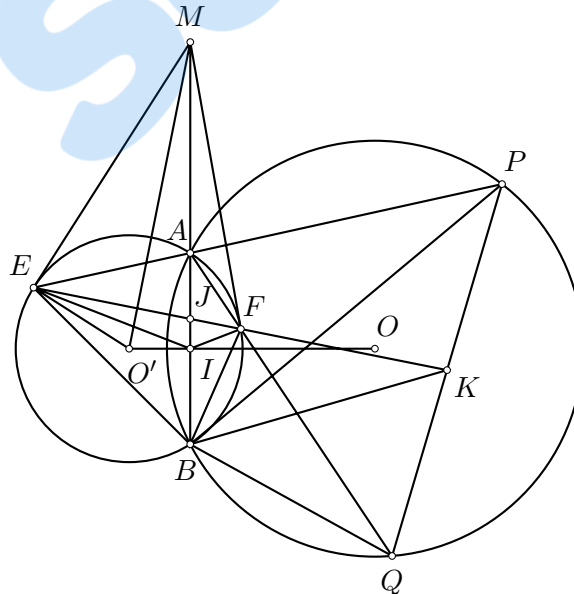
⚡ BÀI 4

(6,0 điểm)

- Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Trên tia đối của tia AB lấy điểm M và kẻ các tiếp tuyến ME, MF với đường tròn (O') (E, F là các tiếp điểm và F nằm trong (O)). Hai đường thẳng AE, AF cắt (O) lần lượt tại P và Q (P, Q khác A). Tia EF cắt PQ tại K .
 - Chứng minh $BKPE$ là tứ giác nội tiếp.
 - Gọi I, J lần lượt là giao điểm của AB với OO' và EF . Chứng minh $\widehat{IJE} = \widehat{IFM}$.
 - Chứng minh $PQ = 2\sqrt{OA^2 - OK^2}$.
- Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 2R$. Gọi M là điểm di động trên nửa đường tròn (M khác B, C). Kẻ MH vuông góc với BC ($H \in BC$). Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác MCH và MBH . Xác định vị trí điểm M để chu vi $\triangle O_1HO_2$ lớn nhất.

💬 Lời giải.

1. Ta có hình vẽ



- Xét đường tròn (O) có $\widehat{BPQ} = \widehat{BAQ}$ (cùng chắn cung BQ) hay $\widehat{EPB} = \widehat{BAF}$ (1).
Xét đường tròn (O') có $\widehat{BEF} = \widehat{BAF}$ (cùng chắn cung BF) hay $\widehat{BEK} = \widehat{BAF}$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EPB} = \widehat{BEK} \Rightarrow BKPE$ là tứ giác nội tiếp.

- b) Do (O) và (O') cắt nhau tại A, B nên $OO' \perp AB$ và do ME, MF là các tiếp tuyến tại E, F của (O') nên $O'E \perp ME$ và $O'F \perp MF$. Từ đó ta có

$$\widehat{MIO'} = \widehat{MEO'} = \widehat{MFO'} = 90^\circ$$

Suy ra các điểm M, E, O', I và F cùng nằm trên đường tròn đường kính MO' . Trong đường tròn này, ta có

$$\begin{aligned} \widehat{IEF} &= \widehat{IMF} \text{ (cùng chắn } \widehat{IF}) \Rightarrow \widehat{IEJ} = \widehat{IMF} \\ \widehat{EIM} &= \widehat{FIM} \text{ (chắn 2 cung } \widehat{ME} \text{ và } \widehat{MF} \text{ bằng nhau)} \Rightarrow \widehat{EIJ} = \widehat{MIF} \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $\triangle EIJ \sim \triangle MIF$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{IJE} = \widehat{IFM}$. Hoàn tất chứng minh.

- c) Vì các tứ giác $ABQP$ và $BKPE$ là nội tiếp nên

$$\begin{cases} \widehat{AEB} = \widehat{BQP} = \widehat{BQK} \\ \widehat{AEB} = \widehat{BKQ} \end{cases} \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle QKB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{QB} = \frac{AE}{QK} \quad (3)$$

Do các tứ giác $ABQP$ và $AEBF$ nội tiếp nên $\widehat{PBQ} = \widehat{PAQ} = \widehat{EBF} \quad (*_1)$.

Xét đường tròn (O') , lại có $\widehat{EBF} = \widehat{EFM} \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{EAF} \right) \quad (*_2)$.

Do tứ giác $EIFM$ nội tiếp nên $\widehat{EFM} = \widehat{EIM} = \widehat{EIA} \quad (*_3)$.

Từ $(*_1), (*_2), (*_3)$ suy ra $\widehat{PBQ} = \widehat{EIA}$. Kết hợp với $\widehat{BQP} = \widehat{EAI}$ theo chứng minh ở trên, suy ra

$$\triangle EIA \sim \triangle PBQ \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AI}{QB} = \frac{AE}{QP} \Rightarrow \frac{AB}{QB} = \frac{2AE}{QP} \quad (4) \text{ (do } AB = 2AI)$$

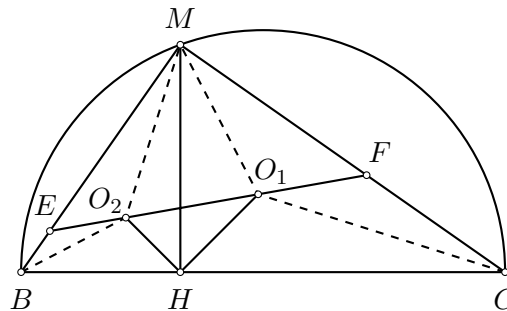
Từ (3) và (4) suy ra $\frac{AE}{QK} = \frac{2AE}{QP} \Rightarrow QP = 2QK \Rightarrow K$ là trung điểm của $PQ \Rightarrow OK \perp PQ$.

Từ đó, theo Pytago, ta có

$$PQ = 2PK = 2\sqrt{OP^2 - OK^2} = 2\sqrt{OA^2 - OK^2}$$

Hoàn tất chứng minh.

2. Ta có hình vẽ sau



Gọi E, F lần lượt là giao điểm của O_1O_2 với MB và MC .

Dễ thấy $\triangle MHO_1 \sim \triangle BHO_2$ (g.g), suy ra

$$\frac{HO_1}{HO_2} = \frac{MH}{BH} = \tan \widehat{MBH} = \tan \widehat{MBC} = \frac{MC}{MB}$$

Do HO_1 và HO_2 là hai tia phân giác của hai góc kề bù nên $HO_1 \perp HO_2 \Rightarrow \widehat{O_1HO_2} = 90^\circ$. Từ những điều trên, suy ra

$$\triangle O_1HO_2 \sim \triangle CMB(c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} \widehat{O_2O_1H} = \widehat{MCB} \\ \widehat{O_1O_2H} = \widehat{MBC} \end{cases}$$

Từ đó ta có các tứ giác O_1FCH và O_2EBH nội tiếp, dẫn tới $\begin{cases} \widehat{MFO_1} = \widehat{O_1HC} = 45^\circ \\ \widehat{MEO_2} = \widehat{O_2HB} = 45^\circ \end{cases}$. Đến đây, dễ dàng chứng minh được

$$\begin{aligned} \triangle MO_1F &= \triangle MO_1H(g.c.g) \Rightarrow O_1F = O_1H \\ \triangle MO_2E &= \triangle MO_2H(g.c.g) \Rightarrow O_2E = O_2H \end{aligned}$$

Từ đó, ta có chu vi $\triangle O_1HO_2$ là

$$O_1H + O_1O_2 + O_2H = O_2E + O_1O_2 + O_1F = EF$$

Xét $\triangle MEF$ vuông cân tại M ($\widehat{MEF} = \widehat{MFE} = 45^\circ$), có

$$EF^2 = 2ME^2 = 2MH^2 \text{ (do } ME = MH \text{ vì } \triangle MO_2E = \triangle MO_2H) \Rightarrow EF = MH\sqrt{2}$$

Như vậy, EF lớn nhất $\Leftrightarrow MH$ lớn nhất $\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa nửa đường tròn. Đó chính là vị trí cần tìm của điểm M .

□

⚡ BÀI 5

(3,0 điểm)

1. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} - \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c}.$$

2. Biết rằng mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba đỉnh và trọng tâm của nó cùng màu.

💬 Lời giải.

1. Cách 1. Từ $ab + bc + ca = 1$ suy ra

$$\begin{aligned} 1 &= ab + c(a+b) \geq ab + 2c\sqrt{ab} \Rightarrow 1 + c^2 \geq (\sqrt{ab} + c)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{ab} \leq \sqrt{1+c^2} - c \\ &\Rightarrow ab \leq 1 + 2c^2 - 2c\sqrt{1+c^2} \end{aligned}$$

Theo Cauchy-Schwarz, ta có

$$\left(\sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right) = \frac{2(1+ab)}{1+c^2}$$

Kết hợp đánh giá ở trên, ta có

$$\left(\sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} \right)^2 \leq \frac{2(1+1+2c^2-2c\sqrt{1+c^2})}{1+c^2} = 4 \left(1 - \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \right)$$

Từ đó, ta có

$$M \leq 2\sqrt{1 - \frac{c}{1+c^2}} - \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c} = T$$

Đặt $\sqrt{1 - \frac{c}{1+c^2}} = t$ ($0 < t < 1$) thì $T = 2t - \frac{9}{8(1-t^2)}$. Ta có

$$T + \frac{1}{2} = 2t - \frac{9}{8(1-t^2)} + \frac{1}{2} = \frac{-(2t-1)^2(4t+5)}{8(1-t^2)} \leq 0 \Rightarrow T \leq -\frac{1}{2}$$

Suy ra $M \leq -\frac{1}{2}$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{7}}$ và $z = \frac{3}{\sqrt{7}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của M là $-\frac{1}{2}$, đạt được tại $x = y = \frac{1}{\sqrt{7}}$ và $z = \frac{3}{\sqrt{7}}$.

Chú ý. Có thể đánh giá T bằng AM-GM như sau

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{1 - \frac{c}{1+c^2}} - \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{c}{1+c^2}} - \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c} \\ &\leq 2\left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right) - \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c} \\ &= \frac{5}{2} - \left(\frac{2c}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c}\right) \\ &\leq \frac{5}{2} - 2\sqrt{\frac{2c}{\sqrt{1+c^2}} \cdot \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c}} \\ &= \frac{5}{2} - 2 \cdot \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Cách 2. Vì $ab + bc + ca = 1$ nên $(a+c)(b+c) = (ab + bc + ca) + c^2 = 1 + c^2$. Từ đó, ta có

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} - \frac{9}{8}\sqrt{\frac{a+c}{c} \cdot \frac{b+c}{c}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} - \frac{9}{8}\sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{a}{a+c}\right) \cdot \left(1 - \frac{b}{b+c}\right)}} \end{aligned}$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{a}{a+c}}$ và $y = \sqrt{\frac{b}{b+c}}$ ($0 < x, y < 1$) thì

$$\begin{aligned} M &= x + y - \frac{9}{8\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \\ &\leq x + y - \frac{9}{4(1-x^2+1-y^2)} \quad (\text{AM-GM}) \\ &= x + y - \frac{9}{2[4-2(x^2+y^2)]} \\ &\leq x + y - \frac{9}{2[4-(x+y)^2]} \quad (\text{AM-GM}) \end{aligned}$$

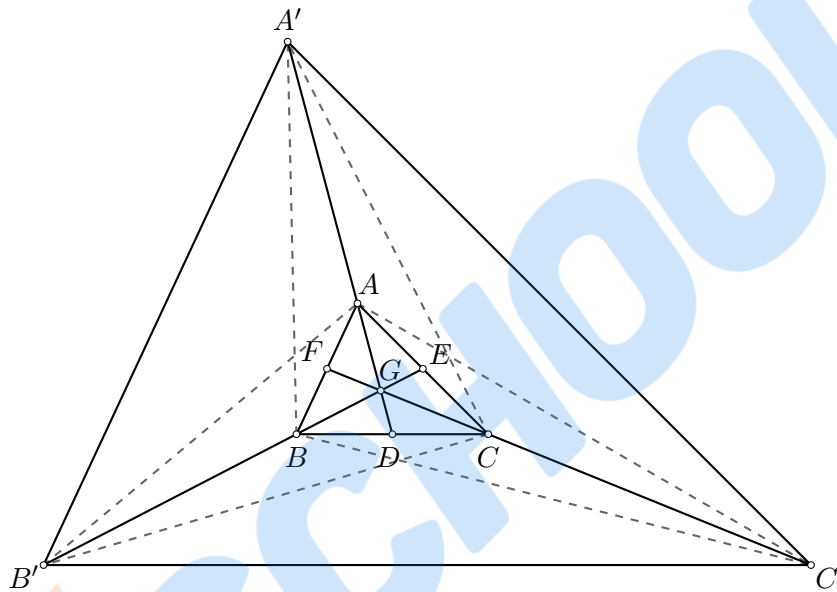
Đặt $t = x + y$ ($0 < t < 2$) thì

$$M \leq t - \frac{9}{2(4-t^2)} = \frac{-(t-1)^2(4t+10)}{2(4-t^2)} - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = y \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{7}} \text{ và } z = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $-\frac{1}{2}$, đạt được tại $x = y = \frac{1}{\sqrt{7}}$ và $z = \frac{3}{\sqrt{7}}$.

2. Xét 5 điểm bất kì trong mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Theo nguyên lý Dirichlet, trong 5 điểm này tồn tại ba điểm được tô cùng một màu. Không mất tính tổng quát, giả sử ba điểm đó là A, B, C và chúng được tô màu đỏ.



Gọi AD, BE, CF là 3 đường trung tuyến và G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Khi đó, nếu G được tô màu đỏ thì ta có điều phải chứng minh. Ngược lại, nếu G được tô màu xanh thì trên tia đối của các tia AG, BG, CG lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $A'A = 2AD, B'B = 2BE$ và $C'C = 2CF$. Khi đó, A, B, C lần lượt là trọng tâm của các tam giác $A'BC, B'CA, C'AB$ và G là trọng tâm của $\triangle A'B'C'$. Lúc này

- Nếu 3 điểm A', B', C' đều tô màu xanh thì $\triangle A'B'C'$ có ba đỉnh A', B', C' và trọng tâm G cùng tô màu xanh và ta có điều phải chứng minh.
- Nếu trong ba điểm A', B', C' tồn tại một điểm tô màu đỏ, giả sử điểm đó là A' . Khi đó, $\triangle A'BC$ có ba đỉnh A', B, C và trọng tâm A cùng tô màu đỏ và ta cũng có điều phải chứng minh.

Vậy luôn tồn tại một tam giác có ba đỉnh và trọng tâm tô cùng một màu.

□