

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TỈNH
TỈNH ĐỒNG NAI
ĐỀ CHÍNH THỨC

NĂM HỌC 2023-2024

Môn Toán

Thời gian làm bài 180 phút

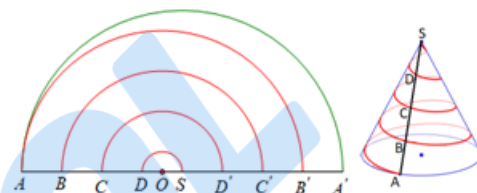
Ngày thi: 19/01/2024 (đề thi gồm một trang có mười câu).

Câu 1. (2,5 điểm) Tìm tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 9$ và tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị đó.

Câu 2. (2,5 điểm) Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x - \cos x - 1 = 0$.

Câu 3. (2 điểm)

Cho một tấm bìa là nửa hình tròn tâm S đường kính AA' . Trên đoạn AA' lần lượt lấy các điểm B, C, D, D', C', B' thỏa mãn $AB = BC = CD = DS = SD' = D'C' = C'B' = B'A'$, gọi O là trung điểm của SD . Lần lượt vẽ các nửa đường tròn tâm O đường kính DS, CD', BC', AB' . Dán hai bán kính SA với SA' sao cho A trùng A' , B trùng B' , C trùng C' , D trùng D' để tạo thành hình nón đỉnh S mà trên mặt xung quanh có đường xoắn ốc từ A đến S gồm các cung tròn đi qua A, B, C, D, S (như hình vẽ minh họa). Tính độ dài đường xoắn ốc, biết thể tích khối nón bằng $\frac{64\sqrt{3} \cdot \pi}{3}$.



Câu 4. (2 điểm) Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\frac{2024x}{x+2}\right)$. Tìm đạo hàm $f'(x)$ của hàm số đã cho. Chứng minh $f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2024) < \frac{3}{2}$.

Câu 5. (2,5 điểm) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC' bằng $9a^2$, biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B'$ và BC' bằng $2a$, với $a > 0$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Câu 6. (2 điểm) Hỏi có bao nhiêu cách sắp 6 quyển sách khác nhau vào 3 ngăn tủ khác nhau sao cho mỗi ngăn tủ có ít nhất một quyển sách? (Biết mỗi ngăn tủ có thể chứa được từ 1 đến 6 quyển sách và không kể thứ tự các quyển sách trong mỗi ngăn tủ).

Câu 7. (1 điểm) Chứng minh C_{2n}^n là số chẵn, với mọi số nguyên dương n .

Câu 8. (2 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3(2x^2 - y^2 + 2y) + 15x - 10 = 0 \\ x^2 + \sqrt{x+y-1} = \sqrt{2-x} \end{cases} \quad (\text{với } x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 9. (2 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)$.

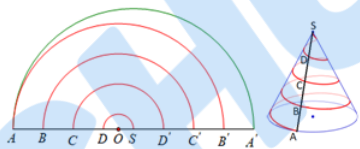
Câu 10. (1,5 điểm) Cho hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn $f(f(2a) + f(b)) = 2a + b$, với mọi số hữu tỷ a, b (ký hiệu tập hợp các số hữu tỷ là $\mathbb{Q}$). Chứng minh f là hàm số lẻ.

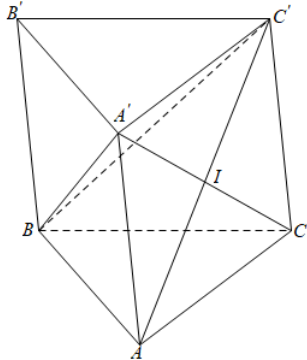
HẾT

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: Trường: ...

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1.		<u>Tìm tọa độ hai điểm cực trị và tính khoảng cách:</u>	2,50
		Ta có $y = x^3 - 3x^2 + 9$, gọi đồ thị là (C) , tập xác định $D = \mathbb{R}$.	0,75
		$y' = 3x^2 - 6x$.	
		$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.	0,25
		Mà $y'' = 6x - 6 \Rightarrow y''(0) = -6 < 0$ và $y''(2) = 6 > 0$.	0,50
		Vậy (C) có hai điểm cực trị là $(0; 9), (2; 5)$.	0,50
2.		Nên khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $\sqrt{(2-0)^2 + (5-9)^2} = 2\sqrt{5}$.	0,50
		<u>Tìm nghiệm dương nhỏ nhất:</u>	2,50
		Ta có $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sin x - \cos x$	0,50
		$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	1,00
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (\forall k \in \mathbb{Z}).$	0,50
		Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{3}$.	0,50
3.		<u>Tính độ dài đường xoắn ốc:</u>	2,00
			0,50
		Đặt $SA = R \Rightarrow l = R$ là đường sinh và gọi r là bán kính đáy của hình nón. $\Rightarrow$ Chu vi đường tròn đáy của hình nón là $2\pi r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \Leftrightarrow r = \frac{R}{2}$.	
		$\Rightarrow$ Hình nón có chiều cao $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ nên có thể tích $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \frac{R^2}{4} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{64\sqrt{3} \cdot \pi}{3} \Leftrightarrow R = 8$.	1,00
		$\Rightarrow AB = BC = CD = DS = 2 \Rightarrow OD = 1, OC = 3, OB = 5, OA = 7$. Vậy độ dài đường xoắn ốc bằng tổng độ dài các nửa đường tròn tâm O đường kính DS, CD', BC', AB' bằng $\pi(OD + OC + OB + OA) = 16\pi$.	0,50
4.		<u>Tìm đạo hàm $f'(x)$ và chứng minh $f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2024) < \frac{3}{2}$:</u>	2,00
		$f(x) = \ln\left(\frac{2024x}{x+2}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{2024x}{x+2}} \left(\frac{2024x}{x+2}\right)' = \frac{2}{x(x+2)} \quad (x > 0 \vee x < -2).$	1,00
		Vậy $\bar{f'(1)} + \bar{f'(2)} + \bar{f'(3)} + \dots + \bar{f'(2024)}$	
		$= 2\left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2023 \cdot 2025}\right) + 2\left(\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2024 \cdot 2026}\right)$ $= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2025}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2026}\right)$ $= 1 - \frac{1}{2025} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2026} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.	1,00

5.	<i>Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$:</i>  Ta có $A'B' \parallel AB \Rightarrow A'B' \parallel (ABC')$ $\Rightarrow d(A', (ABC')) = d(A'B', (ABC')) = d(A'B', BC') = 2a$. Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, hai khối tứ diện $A'ABC', C'ABC$. Gọi S, S_1 lần lượt là diện tích $\triangle ABC, \triangle ABC'$. Ta có $V_1 = \frac{1}{3} \cdot d(A', (ABC')) \cdot S_1 = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 9a^2 = 6a^3$. Vì $AA'C'C$ là hình bình hành nên $A'C$ cắt AC' tại trung điểm I của $A'C$. $\Rightarrow d(C, (ABC')) = d(A', (ABC')) \Rightarrow V_2 = V_1 = 6a^3$. Mặt khác $V_2 = \frac{1}{3} \cdot d(C', (ABC)) \cdot S = \frac{1}{3} \cdot V$ nên $V = 3V_2 = 18a^3$. Do đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $18a^3$.	2,50 0,75
6.	<i>Tính số cách sắp:</i> Để sắp 6 quyển sách khác nhau vào 3 ngăn tủ khác nhau gọi là A, B, C sao cho mỗi ngăn có ít nhất 1 quyển sách, xảy ra một trong ba trường hợp sau: TH1: Sắp 2 ngăn tủ mà mỗi ngăn có 1 quyển, ngăn còn lại có 4 quyển Chia ra 3 trường hợp gồm A và B có 1 quyển và C có 4 quyển và hai hoán vị tương tự. Nên có $C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot 3 = 90$ (cách). TH2: Sắp 1 ngăn tủ có 1 quyển, 1 ngăn có 2 quyển và ngăn còn lại có 3 quyển Tương tự có $(C_6^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^3 + C_6^1 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2) \cdot 3 = 360$ (cách). TH3: Sắp 3 ngăn mà mỗi ngăn có 2 quyển. Tương tự có $C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 90$ (cách). Vậy có $90 + 360 + 90 = 540$ (cách sắp thỏa mãn bài toán).	2,00 0,75 0,75 0,50
7.	<i>Chứng minh C_{2n}^n là số chẵn, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:</i> Xét số nguyên dương n, ta có $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{2n \cdot (2n-1)!}{n \cdot (n-1)! \cdot n!} = 2 \cdot C_{2n-1}^{n-1}$. Mà $C_{2n}^n, C_{2n-1}^{n-1} \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy C_{2n}^n là số chẵn, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.	1,00 0,75 0,25
8.	<i>Giải hệ phương trình:</i> Ta có $\begin{cases} x^3 - y^3 - 3(2x^2 - y^2 + 2y) + 15x - 10 = 0 & (1) \\ x^2 + \sqrt{x+y-1} = \sqrt{2-x} & (2) \end{cases}$. $(1) \Leftrightarrow (x-2)^3 + 3(x-2) = (y-1)^3 + 3(y-1) \quad (3)$. Hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. $(3) \Leftrightarrow f(x-2) = f(y-1) \Leftrightarrow x-2 = y-1 \Leftrightarrow y = x-1$	2,00 0,75 0,25 0,25

	$(2) \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{2x-2} - \sqrt{2-x} = 0$ (điều kiện $x \in D = [1; 2]$) $\Leftrightarrow x^2 - 1 + \sqrt{2x-2} + 1 - \sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 + \sqrt{2x-2} + \frac{x-1}{1+\sqrt{2-x}} = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \left[(x+1)\sqrt{x-1} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{2-x}} \right] = 0$ $\Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow y = 0$ (nhận), vì $(x+1)\sqrt{x-1} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{2-x}} > 0, \forall x \in D$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 0)$.	0,75
9.	<u>Tìm minP:</u> Ta có $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)$. Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $\frac{a^3}{a^3 + 2} + \frac{1}{b^3 + 2} + \frac{1}{c^3 + 2} \geq \frac{3a}{\sqrt[3]{(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)}} \quad (1)$. Tương tự $\frac{b^3}{b^3 + 2} + \frac{1}{c^3 + 2} + \frac{1}{a^3 + 2} \geq \frac{3b}{\sqrt[3]{(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)}} \quad (2)$ và $\frac{c^3}{c^3 + 2} + \frac{1}{a^3 + 2} + \frac{1}{b^3 + 2} \geq \frac{3c}{\sqrt[3]{(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)}} \quad (3)$. Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta có $3 \geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2)}}$ Vậy $P = (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) \geq 27, \forall a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Dấu = xảy ra khi $a = b = c = 1$. Do đó $\min P = 27$.	2,00 1,50 0,50
10.	<u>Chứng minh f là hàm số lẻ:</u> Ta có hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn $f(f(2a) + f(b)) = 2a + b, \forall a, b \in \mathbb{Q} \quad (1)$. Thế $a = b = 0$ vào (1) ta có $f(f(0) + f(0)) = 0 \Leftrightarrow f(2f(0)) = 0$. Đặt $c = 2f(0) \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(c) = 0$. Thế $a = \frac{c}{2} \in \mathbb{Q}$ và $b = c$ vào (1) ta có $f(f(c) + f(c)) = 2c \Leftrightarrow f(0) = 2c$ $\Leftrightarrow f(0) = 4f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$. Thế $a = 0$ và $b = a$ vào (1) ta có $f(f(a)) = a, \forall a \in \mathbb{Q}$. Với $a, b \in \mathbb{Q}$ mà $f(a) = f(b) \Rightarrow f(f(a)) = f(f(b)) \Leftrightarrow a = b \quad (2)$. Với $a \in \mathbb{Q}$, thế a bởi $\frac{a}{2} \in \mathbb{Q}$ và $b = -a$ vào (1) ta có $f(f(a) + f(-a)) = 0$ $\Leftrightarrow f(f(a) + f(-a)) = f(0) \Rightarrow f(a) + f(-a) = 0$ (do (2)) $\Leftrightarrow f(-a) = -f(a), \forall a \in \mathbb{Q}$. Mặt khác lấy $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow -a \in \mathbb{Q}$. Vậy f là hàm số lẻ.	1,50 0,75 0,75

- Cách giải khác đúng được điểm tối đa.
- Điểm thành phần cho theo Biểu điểm này.