

Câu I (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$, với $x > 1; x \neq 2$.

2) Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng:

$$Q = \sqrt{\frac{6x^2}{x^2 - y^2 - z^2}} + \sqrt{\frac{6y^2}{y^2 - z^2 - x^2}} + \sqrt{\frac{6z^2}{z^2 - x^2 - y^2}}$$
 là một số nguyên.

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $2x^2 + 4x + 4 = (2x + 3)\sqrt{x^2 + x + 2}$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 5} + 2y - 1 = 0 \\ 2(2y^3 + x^3) + 3y(x + 1)^2 + 6x(x + 1) + 2 = 0 \end{cases}$$

Câu III (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 24x = -15$.

2) Cho a, b là các số tự nhiên thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng $2a + 2b + 1$ và $3a + 3b + 1$ đều là các số chính phương.

Câu IV (3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC cân tại A , O là trung điểm của BC . Đường tròn tâm O tiếp xúc với hai cạnh AB, AC tại H và K . Gọi P, Q là hai điểm lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho $\widehat{POQ} = \widehat{ABC}$.

a) Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

b) HK cắt OQ tại D . Chứng minh rằng PD vuông góc với OQ .

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và có trực tâm H . Gọi D, E, F lần lượt là chân ba đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{AB}{HF}\right)^2 + \left(\frac{BC}{HD}\right)^2 + \left(\frac{CA}{HE}\right)^2 \geq 36.$$

Câu V (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a(bc+1)^2}{c^2(ca+1)} + \frac{b(ca+1)^2}{a^2(ab+1)} + \frac{c(ab+1)^2}{b^2(bc+1)}.$$

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.