

I. PHẦN TỰ LUẬN (8,0 điểm)

Câu 1 (3,0 điểm):

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2x^2 + (m-3)x + m$  có hai điểm cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân.

2) Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 5(a + b + c) - 2ab$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức  $P = a + b + c + 48 \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+c}} \right)$ .

Câu 2 (1,0 điểm): Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{2} \log_2 (\sqrt{x^2 + 8} - x)$ . Tìm tất cả giá trị nguyên của tham số  $m$

để phương trình  $f(4.5^x + 10x + m) + f(-5^{x+1}) = \frac{3}{2}$  có hai nghiệm dương phân biệt.

Câu 3 (3,0 điểm):

1) Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ , tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ ,  $AB = 2a\sqrt{2}$ ,  $A'A = A'B = A'C$ , đường thẳng  $B'A$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  một góc  $60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $BC$ .

2) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh 4, tam giác  $SAB$  đều, tam giác  $SCD$  vuông cân tại  $S$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc đường thẳng  $CD$  sao cho  $BM$  vuông góc với  $SA$ . Tính thể tích khối chóp  $S.BDM$ .

Câu 4 (1,0 điểm): Hai bạn An và Bình hẹn gặp nhau tại thư viện từ 9 giờ đến 10 giờ. Người đến trước đợi quá 15 phút mà không gặp thì rời đi. Tính xác suất để hai người đi ngẫu nhiên đến nơi hẹn theo quy định mà gặp nhau.

II. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (12,0 điểm)

Câu 1: Đạo hàm của hàm số  $y = \ln \sqrt{x^2 + 1}$  là

A.  $y' = \frac{x}{x^2 + 1}$ . B.  $y' = \frac{x}{2(x^2 + 1)}$ . C.  $y' = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$ . D.  $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

Câu 2: Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và dấu của đạo hàm cho bởi bảng sau.

| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |     |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|-----|-----|-----|
| $f'(x)$ |           | $+$  | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ | $0$ | $-$ |

Giá trị cực tiểu của hàm số  $f(x)$  là

A.  $f(-3)$ . B.  $f(1)$ . C.  $f(-2)$ . D.  $f(-1)$ .

Câu 3: Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_1 = 123$  và  $u_3 - u_{15} = 84$ . Số hạng  $u_{17}$  có giá trị bằng

A. 11. B. 4. C. 235. D. 242.

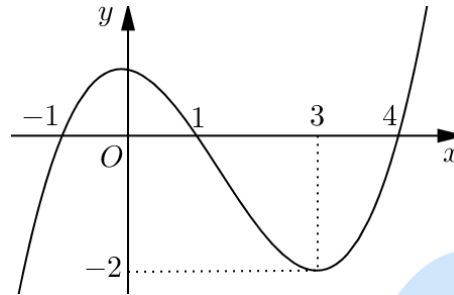
**Câu 4:** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$  và  $F(0) = 1$ . Giá trị của  $F(1)$  bằng

A.  $2 + \frac{1}{4} \ln 2$ .      B.  $\frac{1}{4} \ln 2$ .      C.  $1 + \frac{1}{4} \ln 2$ .      D.  $4 + \frac{1}{2} \ln 2$ .

**Câu 5:** Bất phương trình  $\log_3 \left( \log_{\frac{1}{2}} x \right) < 1$  có tập nghiệm là khoảng  $(a; b)$ . Giá trị của  $b - a$  bằng

A.  $\frac{1}{8}$ .      B.  $\frac{-7}{8}$ .      C.  $\frac{9}{8}$ .      D.  $\frac{7}{8}$ .

**Câu 6:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị  $f'(x)$  như hình bên dưới.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A.  $(-\infty; 0)$ .      B.  $(0; 3)$ .      C.  $(1; 4)$ .      D.  $(1; +\infty)$ .

**Câu 7:** Cho hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  có bảng biến thiên như sau.

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $1$       | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $-$       | $-$       |
| $y$  | $2$       | $+\infty$ | $2$       |

Số đường tiệm cận  $y = \frac{2024}{f(x)}$  của đồ thị hàm số là

A. 4.      B. 3.      C. 2.      D. 1.

**Câu 8:** Một hình trụ có bán kính đáy bằng  $a$  và chiều cao  $\frac{3a}{2}$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  song song với trục của trụ và cách trục một khoảng  $\frac{a}{2}$ . Diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  và trụ là

A.  $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$ .      B.  $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ .      C.  $\frac{2\sqrt{2}a^2}{3}$ .      D.  $\frac{3\sqrt{5}a^2}{2}$ .

**Câu 9:** Một lớp có 30 học sinh gồm 12 học sinh nam, 18 học sinh nữ. Số cách chọn ra 5 học sinh gồm cả nam và nữ, có ít nhất 3 nữ là

A. 53856.      B. 90576.      C. 28800.      D. 99144.

**Câu 10:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $O$ ,  $AC = 2a$ ,  $BD = 2a\sqrt{3}$  và  $SO \perp (ABCD)$ . Biết đường thẳng  $SC$  tạo với mặt phẳng đáy một góc  $\alpha$  với  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ .

Khoảng cách từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng

A.  $\frac{2a\sqrt{66}}{11}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{11}}{11}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{33}}{11}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{66}}{11}$ .

**Câu 11:** Biết phương trình  $\log_2^2 x - 2\log_2(2x) - 1 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Giá trị của  $x_1 x_2$  bằng

- A. 4.                      B.  $\frac{17}{2}$ .                      C. -3.                      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 12:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật tâm  $O$ ,  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{3}$ ,  $SA \perp (ABCD)$ . Khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ . Tính thể tích  $V$  của khối chóp  $S.ABCD$ .

- A.  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ .                      B.  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .                      C.  $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{10}$ .                      D.  $V = a^3\sqrt{3}$ .

**Câu 13:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (3-x)(x^2-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó, hàm số  $g(x) = f(x) - x^2 - 1$  đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- A.  $x = -1$ .                      B.  $x = 1$ .                      C.  $x = 3$ .                      D.  $x = 0$ .

**Câu 14:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$  bằng

- A. 7                      B.  $2\sqrt{2}$                       C. 2.                      D. 5

**Câu 15:** Một hộp đựng 11 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 11. Chọn ngẫu nhiên 6 tấm thẻ. Xác suất để tổng số ghi trên 6 tấm thẻ là một số lẻ bằng

- A.  $\frac{115}{231}$ .                      B.  $\frac{103}{231}$ .                      C.  $\frac{130}{231}$ .                      D.  $\frac{118}{231}$ .

**Câu 16:** Cho khối lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng  $(A'BC)$  tạo với đáy góc  $30^\circ$  và tam giác  $A'BC$  có diện tích bằng  $8a^2$ . Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

- A.  $64\sqrt{3}a^3$ .                      B.  $2\sqrt{3}a^3$ .                      C.  $16\sqrt{3}a^3$ .                      D.  $8\sqrt{3}a^3$ .

**Câu 17:** Cho các số dương  $a, b, c$  khác 1 thỏa mãn  $\log_a(bc) = 3$  và  $\log_b(ac) = 4$ . Giá trị của  $\log_c(ab)$  bằng

- A.  $\frac{16}{9}$ .                      B.  $\frac{9}{16}$ .                      C.  $\frac{11}{9}$ .                      D.  $\frac{9}{11}$ .

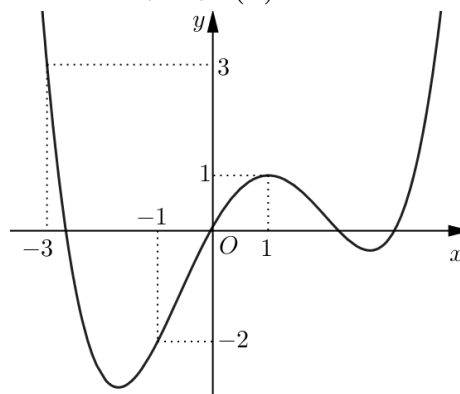
**Câu 18:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $2a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy và  $SA = 2a$ . Góc giữa đường thẳng  $SD$  và mặt phẳng  $(SAC)$  bằng

- A.  $60^\circ$ .                      B.  $30^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $90^\circ$ .

**Câu 19:** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $a$  và cạnh bên bằng  $2a$ . Diện tích  $S$  của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ bằng

- A.  $S = \frac{2\sqrt{3}\pi a^2}{3}$ .                      B.  $S = \frac{32\sqrt{3}\pi a^2}{27}$ .                      C.  $S = \frac{16\pi a^2}{3}$ .                      D.  $S = \frac{16\sqrt{3}\pi a^2}{3}$ .

**Câu 20:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ dưới đây.



Hàm số  $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2024$  đồng biến trên khoảng nào?

- A.  $(-\infty; -2)$                       B.  $(-3; -1)$ .                      C.  $(-1; 1)$ .                      D.  $(1; +\infty)$ .

**Câu 21:** Cắt hình nón đỉnh  $I$  bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng  $a\sqrt{2}$ . Gọi  $BC$  là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng  $(IBC)$  tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc  $60^\circ$ . Diện tích của tam giác  $IBC$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{2}a^2}{3}$ .      B.  $\frac{2a^2}{3}$ .      C.  $\frac{a^2}{3}$ .      D.  $\frac{\sqrt{2}a^2}{6}$ .

**Câu 22:** Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $\log_7 x < \log_3(2 + \sqrt{x})$  là

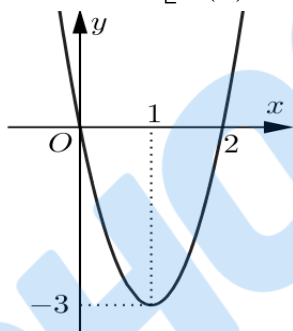
- A. 25.      B. 49.      C. 48.      D. 26.

**Câu 23:** Cho hàm số bậc nhất  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^1 f(x)dx = 4$ ;  $\int_2^3 f(x)dx = 2$ . Tích phân

$$I = \int_0^1 f(f(2x-5))dx \text{ bằng}$$

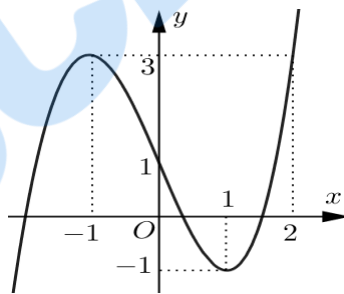
- A. 6.      B.  $\frac{7}{2}$ .      C. -4.      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 24:** Cho hàm số đa thức  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-8; 8]$  để phương trình  $f[f(x) + m] = 0$  có bốn nghiệm thực phân biệt?



- A. 11.      B. 12.      C. 10.      D. 9.

**Câu 25:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để bất phương trình  $f(2x^3 + x - 1) - m \leq 0$  nghiệm đúng  $\forall x \in [0; 1]$ .

- A.  $m \geq 0$ .      B.  $m > 3$ .      C.  $m \geq -1$ .      D.  $m \geq 3$ .

**Câu 26:** Biết tích phân  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 \cos x - 2 \sin x}{\sin x + 3 \cos x} dx = \frac{a\pi}{2} + b \ln 2 - c \ln 3$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Tính  $P = abc$ .

- A.  $P = \frac{4}{3}$ .      B.  $P = \frac{3}{4}$ .      C.  $P = 3$ .      D.  $P = \frac{2}{3}$ .

**Câu 27:** Cho hàm số  $f(x) = x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 1 - 3m$ . Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m$  có nghiệm thuộc đoạn  $[0; 1]$ . Tổng các phần tử của  $S$  bằng

- A. 10.      B. 9.      C. 6.      D. 36.

**Câu 28:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc đoạn  $[-2023; 2023]$  để phương trình

$$\frac{1}{\log_3(x-2)} + \frac{1}{3^x - 1} = x + m \text{ có hai nghiệm phân biệt?}$$

- A. 2023.                      B. 2020.                      C. 2021.                      D. 2022.

**Câu 29:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn

$$f'(x) \cdot \cos x + f(x) \cdot \sin x = 2 \sin x \cdot \cos^3 x, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}, \text{ và } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A.  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \in (2; 3)$ .              B.  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \in (3; 4)$ .              C.  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \in (4; 5)$ .              D.  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \in (1; 2)$ .

**Câu 30:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn  $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - f'(x)\right), \forall x \in (0; +\infty)$  và

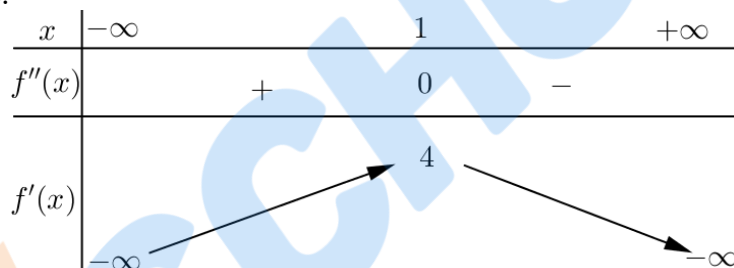
$$f(4) = \frac{4}{3}. \text{ Tích phân } \int_1^4 (x^2 - 1)f'(x)dx \text{ bằng}$$

- A.  $-\frac{263}{15}$ .                      B.  $-\frac{263}{30}$ .                      C.  $\frac{457}{15}$ .                      D.  $\frac{457}{30}$ .

**Câu 31:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $m \cdot 3^{x^2-3x+2} + 3^{4-x^2} = 3^{6-3x} + m$  có bốn nghiệm thực phân biệt?

- A. 78.                      B. 80.                      C. 81.                      D. 77.

**Câu 32:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Biết  $f'(4) = 0$  và  $f'(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên  $m \in [-2023; 2024]$  để hàm số  $y = e^{-x^2+mx+1} \cdot f(x)$  đồng biến trên  $(1; 4)$ ?

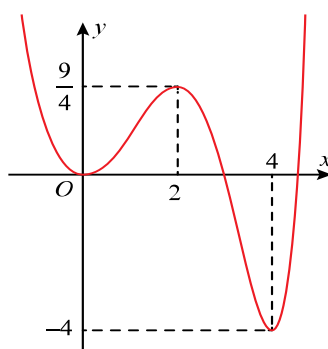
- A. 2016                      B. 2018.                      C. 2017.                      D. 2019.

**Câu 33:** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $A'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trọng tâm tam giác  $ABC$ . Biết khoảng cách giữa hai

đường thẳng  $AA'$  và  $BC$  bằng  $\frac{a}{2}$ . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ .                      B.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ .                      C.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ .                      D.  $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$ .

**Câu 34:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị của hàm số  $y = f(5-2x)$  như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  thuộc khoảng  $(-9;9)$  thỏa mãn  $2m \in \mathbb{Z}$  để hàm số  $y = \left| 2f(4x^3 + 1) + m - \frac{1}{2} \right|$  có 5 điểm cực trị?

- A. 26. B. 25. C. 13. D. 27.

**Câu 35:** Cho hàm số  $y = \frac{x}{x-1}$  có đồ thị  $(C)$  và đường thẳng  $d: y = -x + m$ . Với  $m > 4$  thì  $d$  cắt  $(C)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  sao cho tam giác  $OAB$  ( $O$  là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng  $2\sqrt{2}$ . Khi đó  $m$  thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.  $(5;6)$  B.  $(3;5)$ . C.  $(7;9)$ . D.  $(5;7)$ .

**Câu 36:** Số giá trị của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |\ln^2 x - 2 \ln x + m|$  trên đoạn  $\left[\frac{1}{e}; e^2\right]$  bằng 5 là

- A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

**Câu 37:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $AB = BC = 3a$ , góc  $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$  và khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng  $a\sqrt{5}$ . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $S.ABC$  bằng

- A.  $\frac{3\sqrt{13}a}{4}$ . B.  $\frac{3\sqrt{13}a}{2}$ . C.  $\frac{\sqrt{13}a}{2}$ . D.  $\frac{4a\sqrt{13}}{3}$ .

**Câu 38:** Có bao nhiêu bộ số thực của cặp tham số  $(m; n)$  để tồn tại đúng hai bộ số thực  $(x; y)$  thỏa mãn đồng thời  $\log_{x^2+y^2+10} (6|x| + 6|y| + 1) \geq 1$  và  $(x+m)^2 + (y-2m-6)^2 \leq n^2$ ?

- A. 4. B. 8. C. 2. D. 0.

**Câu 39:** Cho hàm số  $f(x)$  đồng biến, có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[1;4]$  và  $f(1)=1$ . Biết  $\left[2f(x) + xf'(x)\right]^2 = \frac{f(x)}{x}$  với  $\forall x \in [1;4]$ . Khi đó  $\int_2^3 f(x)dx$  bằng

- A.  $2 + \ln 3$ . B.  $\ln \frac{3}{2}$ . C.  $4 \ln 3 - \ln 2$ . D.  $\ln 3 - 5 \ln 2$ .

**Câu 40:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính  $AD = 2a$ , cạnh bên  $SA = a$  và vuông góc với đáy. Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $B$  và vuông góc với  $SC$  chia khối chóp thành hai phần. Tính thể tích khối đa diện chứa đỉnh  $C$ .

- A.  $\frac{21a^3\sqrt{3}}{256}$ . B.  $\frac{63a^3\sqrt{3}}{256}$ . C.  $\frac{63a^3\sqrt{3}}{512}$ . D.  $\frac{21a^3\sqrt{3}}{128}$ .

HẾT

- Họ và tên thí sinh: .....SBD: .....

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

**ĐÁP ÁN, HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**Môn: TOÁN**

(Hướng dẫn chấm có 05 trang)

**I. PHẦN TRẮC NGHIỆM**

| Câu | Đáp án | Câu | Đáp án | Câu | Đáp án | Câu | Đáp án |
|-----|--------|-----|--------|-----|--------|-----|--------|
| 1   | A      | 11  | A      | 21  | A      | 31  | A      |
| 2   | C      | 12  | B      | 22  | C      | 32  | C      |
| 3   | A      | 13  | B      | 23  | C      | 33  | D      |
| 4   | C      | 14  | B      | 24  | A      | 34  | A      |
| 5   | D      | 15  | D      | 25  | D      | 35  | D      |
| 6   | C      | 16  | D      | 26  | B      | 36  | C      |
| 7   | C      | 17  | D      | 27  | A      | 37  | A      |
| 8   | A      | 18  | B      | 28  | D      | 38  | C      |
| 9   | B      | 19  | C      | 29  | A      | 39  | B      |
| 10  | A      | 20  | C      | 30  | C      | 40  | A      |

**II. PHẦN TỰ LUẬN**

**Lưu ý khi chấm bài**

- Hướng dẫn chấm (HDC) dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic;
- Thí sinh làm bài theo cách khác với HDC mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của HDC;
- Điểm bài thi là tổng điểm các bài không làm tròn số.

**Hướng dẫn chấm tự luận**

**Câu 1 (3,0 điểm):**

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2x^2 + (m - 3)x + m$  có hai điểm cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân.

2) Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 5(a + b + c) - 2ab$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức  $P = a + b + c + 48 \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+c}} \right)$ .

| Ý                               | Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Điểm |
|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>3.1</b><br><b>(1,5 điểm)</b> | Ta có $y' = 3x^2 + 4x + m - 3$ , để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{3} (*)$                                                                                                             | 0,25 |
|                                 | Ta có $y = y' \cdot \left( \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \right) + \left( \frac{2m}{3} - \frac{26}{9} \right)x + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3}$<br>nên phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là<br>$y = \left( \frac{2m}{3} - \frac{26}{9} \right)x + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3} (\Delta)$ | 0,25 |

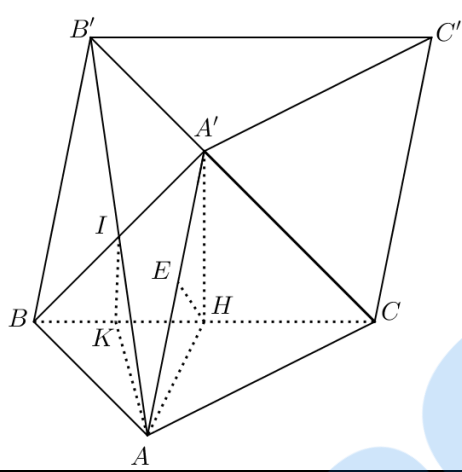
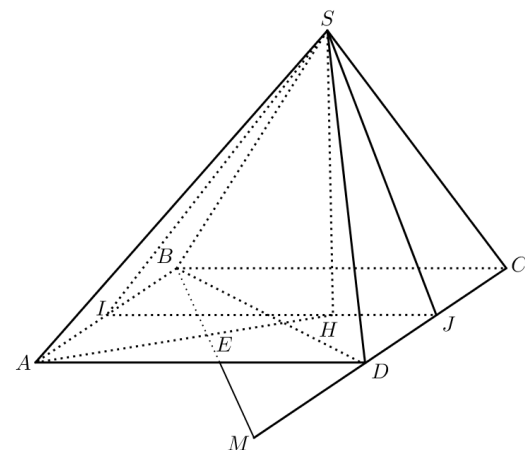
|                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 3.2<br>(1,5 điểm) | Ta có đường thẳng $(\Delta)$ giao với trục hoành tại điểm $A\left(\frac{-7m-6}{6m-26}; 0\right)$<br>$(\Delta)$ giao với trục tung tại điểm $B\left(0; \frac{7m+6}{9}\right)$                                                                                                                                                                                      | 0,25 |
|                   | Để tam giác $OAB$ cân tại $O$ thì $OA = OB \Rightarrow \left \frac{-7m-6}{6m-26}\right  = \left \frac{7m+6}{9}\right $<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7m+6}{6m-26} = \frac{7m+6}{9} \\ \frac{7m+6}{6m-26} = -\left(\frac{7m+6}{9}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-6}{7} \\ m = \frac{35}{6} \\ m = \frac{17}{6} \end{cases}$ | 0,5  |
|                   | Do điểm $O$ không nằm trên đường thẳng $\Delta$ nên $m \neq \frac{-6}{7}$ .<br>Đối chiếu với điều kiện $(*)$ , giá trị cần tìm là $m = \frac{17}{6}$ .                                                                                                                                                                                                            | 0,25 |
|                   | Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 5(a+b+c) - 2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 + c^2 = 5(a+b+c)$ .<br>Áp dụng B.C.S ta có<br>$5(a+b+c) = (a+b)^2 + c^2 \geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2 \Rightarrow 0 < a+b+c \leq 10$                                                                                                                                                                  | 0,25 |
|                   | Áp dụng AM-GM ta có<br>$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a+10}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a+10}{3}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+10}{3} \cdot 4}} \geq \frac{12}{a+22}$<br>$\frac{1}{\sqrt[3]{b+c}} = \frac{1}{\frac{1}{4}\sqrt[3]{(b+c) \cdot 8 \cdot 8}} \geq \frac{12}{b+c+16}$                                                                                      | 0,5  |
|                   | Vậy $P \geq a+b+c + 576\left(\frac{1}{a+22} + \frac{1}{b+c+16}\right) \geq a+b+c + \frac{2304}{a+b+c+38}$                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25 |
|                   | Đặt $t = a+b+c, t \in (0; 10]$<br>Xét $f(t) = t + \frac{2304}{t+38}$ trên $(0; 10]$ ,<br>$f'(t) = 1 - \frac{2304}{(t+38)^2} = \frac{(t-10)(t+86)}{(t+38)^2} \leq 0 \quad \forall t \in (0; 10].$                                                                                                                                                                  | 0,25 |
|                   | Suy ra $P \geq f(t) \geq f(10) = 58$ , dấu "=" xảy ra khi $a = 2, b = 3, c = 5$ .<br>Vậy $\min P = 58$ khi $a = 2, b = 3, c = 5$ .                                                                                                                                                                                                                                | 0,25 |

**Câu 2 (1,0 điểm):** Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{2} \log_2(\sqrt{x^2+8}-x)$ . Tìm tất cả giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(4.5^x + 10x + m) + f(-5^{x+1}) = \frac{3}{2}$  có hai nghiệm dương phân biệt.

| Ý                   | Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Điểm     |           |          |           |         |  |   |   |   |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|----------|-----------|---------|--|---|---|---|
| Câu 2<br>(1,0 điểm) | <p>Điều kiện : <math>\sqrt{x^2+8}-x&gt;0\Rightarrow \forall x\in \mathbb{R}</math></p> <p>Ta có</p> $f(x)=\frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)=\frac{1}{2}\log_2\frac{8}{\sqrt{x^2+8}+x}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{x^2+8}+x\right)$ <p>Khi đó <math>\frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{x^2+8}-x\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(\sqrt{x^2+8}+x\right)=\frac{3}{2}</math>.</p> <p>Vậy <math>f(x)+f(-x)=\frac{3}{2},\forall x\in \mathbb{R}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,25     |           |          |           |         |  |   |   |   |
|                     | <p>Mặt khác <math>f'(x)=\frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{x^2+8}\ln 2}&lt;0,\forall x\in \mathbb{R}</math></p> <p>Vậy <math>f(x)</math> là hàm số nghịch biến trên <math>\mathbb{R}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25     |           |          |           |         |  |   |   |   |
|                     | <p>Từ giả thiết ta có</p> $f\left(4.5^x+10x+m\right)=\frac{3}{2}-f\left(-5^{x+1}\right)\Leftrightarrow f\left(4.5^x+10x+m\right)=f\left(5^{x+1}\right)$ $\Leftrightarrow 4.5^x+10x+m=5.5^x\Leftrightarrow m=5^x-10x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,25     |           |          |           |         |  |   |   |   |
|                     | <p>Xét hàm số <math>h(x)=5^x-10x,h'(x)=5^x\ln 5-10</math></p> <p>Khi đó <math>h'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_5\left(\frac{10}{\ln 5}\right)=\alpha</math></p> <p>Lập bảng biến thiên trên <math>(0;+\infty)</math></p> <table><tr><td><math>x</math></td><td>0</td><td><math>\alpha</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>h'(x)</math></td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table> <div><div><math>h(x)</math></div><div><div>1</div><div><math>h(\alpha)</math></div><div><math>+\infty</math></div></div></div> <p>Từ bảng biến thiên trên điều kiện là: <math>-5,14\approx h(\alpha)&lt;m&lt;1</math>.</p> <p>Do <math>m\in \mathbb{Z}</math> nên <math>m\in \{-5;-4;-3;-2;-1;0\}</math>.</p> | $x$      | 0         | $\alpha$ | $+\infty$ | $h'(x)$ |  | - | 0 | + |
| $x$                 | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $\alpha$ | $+\infty$ |          |           |         |  |   |   |   |
| $h'(x)$             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | -        | 0         | +        |           |         |  |   |   |   |

**Câu 3 (3,0 điểm):**

- 1) Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ , tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ ,  $AB = 2a\sqrt{2}$ ,  $A'A = A'B = A'C$ , đường thẳng  $B'A$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  một góc  $60^\circ$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $BC$ .
- 2) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh 4, tam giác  $SAB$  đều, tam giác  $SCD$  vuông cân tại  $S$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc đường thẳng  $CD$  sao cho  $BM$  vuông góc với  $SA$ . Tính thể tích khối chóp  $S.BDM$ .

| Ý                               | Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Điểm |
|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <p><b>3.1</b><br/>(1,5điểm)</p> |                                                                                                                                                                                                                                      |      |
|                                 | <p>Gọi <math>H</math> là trung điểm của <math>BC</math>, <math>\triangle ABC</math> vuông cân tại <math>A</math> nên <math>H</math> là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>ABC</math>.<br/> Mà <math>A'A = A'B = A'C \Rightarrow A'H \perp (ABC)</math>.</p>                                                  | 0,25 |
|                                 | <p>Gọi <math>I = AB' \cap BA'</math>, kẻ <math>IK \parallel A'H</math> (<math>K \in BC</math>) <math>\Rightarrow IK \perp (ABC)</math><br/> <math>\Rightarrow (B'A; (ABC)) = \widehat{IAK} = 60^\circ</math>.</p>                                                                                                      | 0,25 |
|                                 | <p>Xét <math>\triangle ABC</math> vuông cân tại <math>A</math> ta có <math>BC = 4a</math>, <math>AH = 2a</math>, <math>HK = a \Rightarrow AK = a\sqrt{5}</math>.<br/> Xét <math>\triangle AKI</math> vuông tại <math>K</math> ta có <math>IK = AK\sqrt{3} = a\sqrt{15} \Rightarrow A'H = 2IK = 2a\sqrt{15}</math>.</p> | 0,5  |
|                                 | <p>Dựng <math>HE \perp A'A</math>. Ta có <math>BC \perp AH</math>, <math>BC \perp A'H \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp HE</math><br/> Suy ra <math>d(AA'; BC) = HE</math>.</p>                                                                                                                         | 0,25 |
|                                 | <p>Khi đó <math>\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{60a^2} = \frac{4}{15a^2}</math><br/> Suy ra <math>HE = \frac{\sqrt{15}a}{2}</math> hay <math>d(AA', BC) = \frac{\sqrt{15}a}{2}</math>.</p>                                                                               | 0,25 |
| <p><b>3.2</b><br/>(1,5điểm)</p> |                                                                                                                                                                                                                                    |      |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |      |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |      |
|  | <p>Gọi <math>I, J</math> lần lượt là trung điểm của <math>AB</math> và <math>CD</math>.</p> <p>Ta có <math>AB \perp IJ, AB \perp SI \Rightarrow AB \perp (SIJ) \Rightarrow (SIJ) \perp (ABCD)</math>.</p> <p>Gọi <math>H</math> là hình chiếu của <math>S</math> lên <math>IJ</math> ta có <math>SH \perp (ABCD)</math>.</p> | 0,25 |
|  | <p>Ta có <math>SI = 2\sqrt{3}, SJ = 2, IJ = 4</math>.</p> <p>Khi đó <math>SI^2 + SJ^2 = IJ^2</math> suy ra tam giác <math>SIJ</math> vuông tại <math>S</math>. Ta có <math>SH = \frac{SI \cdot SJ}{IJ} = \sqrt{3}</math>.</p>                                                                                                | 0,25 |
|  | <p>Ta có <math>HI = \sqrt{SI^2 - SH^2} = 3</math> và <math>AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{13}</math>.</p> <p>Gọi <math>E = AH \cap BM</math>. Ta có <math>\begin{cases} BM \perp SA \\ BM \perp SH \end{cases} \Rightarrow BM \perp AH</math>.</p>                                                                          | 0,25 |
|  | Ta có $\widehat{ABM} = \widehat{BMC} = \widehat{AHI}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,25 |
|  | Khi đó $\sin \widehat{BMC} = \sin \widehat{AHI} \Rightarrow \frac{BC}{BM} = \frac{AI}{AH} \Rightarrow BM = \frac{BC \cdot AH}{AI} = \frac{4 \cdot \sqrt{13}}{2} = 2\sqrt{13}$                                                                                                                                                | 0,25 |
|  | Vậy $MC = \sqrt{BM^2 - BC^2} = 6$                                                                                                                                                                                                                                                                                            |      |
|  | <p><math>S_{\Delta BMD} = S_{\Delta BMC} - S_{\Delta BDC} = 12 - 8 = 4</math>.</p> <p>Thể tích <math>V</math> của khối chóp <math>S.BDM</math> là <math>V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta BMD} = \frac{4\sqrt{3}}{3}</math>.</p>                                                                                      | 0,25 |

**Câu 4 (1,0 điểm):** Hai bạn An và Bình hẹn gặp nhau tại thư viện từ 9 giờ đến 10 giờ. Người đến trước đợi quá 15 phút mà không gặp thì rời đi. Tính xác suất để hai người đi ngẫu nhiên đến nơi hẹn theo quy định mà gặp nhau.

| Ý                       | Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Điểm |
|-------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |
| <b>Câu 4 (1,0 điểm)</b> | <p>Gọi <math>x</math> (phút) là thời gian mà bạn An đến chờ ở thư viện.</p> <p>Gọi <math>y</math> (phút) là thời gian mà bạn Bình đến chờ ở thư viện.</p> <p>Điều kiện: <math>0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60</math> (1)</p> <p><math>n(\Omega) = 60^2 = 3600</math> (là diện tích hình vuông cạnh 60)</p> | 0,25 |
|                         | <p>Điều kiện gặp nhau là <math> x - y  \leq 15 \Leftrightarrow x - 15 \leq y \leq x + 15</math> (2)</p>                                                                                                                                                                                                       | 0,25 |
|                         | <p>Điểm <math>M(x; y)</math> thỏa mãn điều kiện (1) và (2) thuộc lục giác được tô đậm ở hình trên. Lục giác có diện tích <math>S' = S - 45^2 = 60^2 - 45^2 = 1575</math></p>                                                                                                                                  | 0,25 |
|                         | <p>Vậy xác suất để 2 người gặp nhau là: <math>P = \frac{S'}{S} = \frac{1575}{3600} = \frac{7}{16}</math></p>                                                                                                                                                                                                  | 0,25 |

.....Hết.....