

Bài 1. (3,0 điểm)

1. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $b(a+1) = 1-a$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = a\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}} + b\sqrt{\frac{1+a^2}{1+b^2}} + \sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{4}}$.

2. Chứng minh: $B = \sqrt{1+2023^2} + \frac{2023^2}{2024^2} + \frac{2023}{2024}$ là số tự nhiên.

Bài 2. (3,0 điểm)

1. Trên hệ trục tọa độ Oxy cho điểm hai điểm $A(-1;1)$, $B(-5;-3)$ và đường thẳng $(d): y = ax + b$

a) Tính diện tích tam giác OAB .

b) Tìm a và b biết đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB và tiếp xúc với đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 4\sqrt{2}$.

2. Cho đa thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ với a, b là các số hữu tỉ. Biết đa thức đã cho có một nghiệm là $x = 2 - \sqrt{3}$, tìm các nghiệm còn lại của đa thức.

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $4x^2 + 3x + 2 = 3\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \sqrt{x-y} = 2y + 1 + \sqrt{y+1} \\ 8x^3 - 52y^2 - 15x + 11 = (x+3)\sqrt{12y^2 + 6x - 5} \end{cases}$$

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{x^2 + yz}{x\sqrt{y+z}} + \frac{y^2 + zx}{y\sqrt{z+x}} + \frac{z^2 + xy}{z\sqrt{x+y}}$$

Bài 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H . Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của NP với AH và AO , I là trung điểm của AH .

1. Chứng minh: $IN^2 = IK \cdot IM$.

2. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BN và CP . Chứng minh EF vuông góc với QM .

Bài 6. (3,0 điểm)

Cho đường thẳng (d) và đường tròn $(O; R)$ không giao nhau. Trên đường thẳng (d) lấy điểm A . Từ điểm A kẻ tiếp tuyến AB, AC với $(O; R)$, (B, C là tiếp điểm) và cát tuyến ADE không đi qua tâm O , (D nằm giữa A và E). Gọi I là trung điểm của DE . Đường thẳng BC cắt OA và OI lần lượt tại H và K .

1. Chứng minh rằng KE là tiếp tuyến của $(O; R)$.

2. Chứng minh rằng khi A di động trên (d) thì H di động trên một đường tròn cố định.

Bài 7. (2,0 điểm)

Cho a, b là các số nguyên, $a \neq -1, b \neq -1$ thỏa mãn: $\frac{(a-1)(a+1)^2 + (b-1)(b+1)^2}{a+b+ab+1}$ là số nguyên.

Chứng minh: $a^{2023}b^{2024} - a$ chia hết cho $a^2 + a$.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Tác giả: Nguyễn Tiến Mỹ

Đội tuyển HSG huyện Đức Thọ, Hà Tĩnh, năm học 2023-2024

Bài 1. (3,0 điểm)

1. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $b(a+1) = 1 - a$.

Tính giá trị của biểu thức $P = a\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}} + b\sqrt{\frac{1+a^2}{1+b^2}} + \sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{4}}$.

2. Chứng minh: $B = \sqrt{1+2023^2} + \frac{2023^2}{2024^2} + \frac{2023}{2024}$ là số tự nhiên.

Lời giải.

1. Từ giả thiết, ta có $ab + a + b = 1$. Thế vào P ta có: $P = a\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}} + b\sqrt{\frac{1+a^2}{1+b^2}} + \sqrt{\frac{(1+a^2)(1+b^2)}{4}}$

$$\begin{aligned} &= a\sqrt{\frac{ab+a+b+b^2}{ab+a+b+a^2}} + b\sqrt{\frac{ab+a+b+a^2}{ab+a+b+b^2}} + \sqrt{\frac{(ab+a+b+a^2)(ab+a+b+b^2)}{4}} \\ &= a\sqrt{\frac{(a+b)(b+1)}{(a+b)(a+1)}} + b\sqrt{\frac{(a+b)(a+1)}{(a+b)(b+1)}} + \sqrt{\frac{(a+b)(a+1)(a+b)(b+1)}{4}} \\ &= a\sqrt{\frac{b+1}{a+1}} + b\sqrt{\frac{a+1}{b+1}} + (a+b)\sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{4}} = \sqrt{(a+1)(b+1)} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{a+b}{2} \right) \\ &= \sqrt{ab+a+b+1} \left(2 + \frac{a+b}{2} - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \right) \right) = \sqrt{2} \left(2 + \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(2 + \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+2}{ab+a+b+1} \right) = \sqrt{2} \left(2 + \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+2}{2} \right) = \sqrt{2} (2-1) = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \sqrt{2}$ khi tồn tại các số thực dương a, b thỏa mãn $b(a+1) = 1 - a$.

$$\begin{aligned} 2. \text{ Ta có: } B &= \sqrt{1+2023^2} + \frac{2023^2}{2024^2} + \frac{2023}{2024} = \sqrt{(1+2023)^2 - 2 \cdot 2023 + \frac{2023^2}{2024^2}} + \frac{2023}{2024} \\ &= \sqrt{2024^2 - 2 \cdot 2024 \cdot \frac{2023}{2024} + \frac{2023^2}{2024^2}} + \frac{2023}{2024} = \sqrt{\left(2024 - \frac{2023}{2024} \right)^2} + \frac{2023}{2024} = 2024 - \frac{2023}{2024} + \frac{2023}{2024} = 2024. \end{aligned}$$

Do 2024 là số tự nhiên nên ta có đpcm.

Bài 2. (3,0 điểm)

1. Trên hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-1; 1)$, $B(-5; -3)$ và đường thẳng $(d): y = ax + b$

a) Tính diện tích tam giác OAB .

b) Tìm a và b biết đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB và tiếp xúc với đường tròn tâm $O(0; 0)$ bán kính $R = 4\sqrt{2}$.

2. Cho đa thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ với a, b là các số hữu tỉ. Biết đa thức đã cho có một nghiệm là $x = 2 - \sqrt{3}$ tìm các nghiệm còn lại của đa thức.

Lời giải.

1a). Vẽ hình chữ nhật $GETB$ như hình vẽ dưới đây.

Theo bài ra, ta có: $AG = |x_G - x_A| = |-5 - (-1)| = 4$.

Tương tự ta có: $AE = OE = 1$; $BG = 4$; $OT = 3$; $BT = 5$.

$$\Rightarrow S_{GEBT} = BG.BT = 4.5 = 20; S_{G4B} = \frac{BG.AG}{2} = \frac{4.4}{2} = 8;$$

$$S_{O.AE} = \frac{OE.AE}{2} = \frac{1.1}{2} = \frac{1}{2}; S_{O.TB} = \frac{OT.BT}{2} = \frac{3.5}{2} = \frac{15}{2}.$$

$$\Rightarrow S_{OAB} = S_{GEFT} - S_{GAB} - S_{OAE} - S_{OTB} = 20 - 8 - \frac{1}{2} - \frac{15}{2} = 4 \text{ (đơn vị diện tích)}.$$

Vậy $S_{OAB} = 4$ đơn vị diện tích.

1b) b) Gọi đường thẳng (AB): $y = mx + k$ đi qua $A(-1;1)$, $B(-5;-3)$ nên

$$\begin{cases} -m+k=1 \\ -5m+k=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ k=2 \end{cases} \Rightarrow (AB): y = x + 2. \text{ Vì } (d) \perp (AB) \text{ nên } a = -1, \text{ khi đó } (d): y = -x + b$$

Giả sử (d) tiếp xúc với $(O; 4\sqrt{2})$ tại K và vuông góc với (AB) tại H. Dễ thấy AOKH là hình chữ nhật,

suy ra $AH = OK = 4\sqrt{2}$. Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + b \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{b-2}{2}; y = \frac{b+2}{2}. \text{ Suy ra } H\left(\frac{b-2}{2}; \frac{b+2}{2}\right) \Rightarrow AH = \frac{|b|}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{2} = \frac{|b|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |b| = 8 \Leftrightarrow b = \pm 8. \text{ Vậy } (a; b) \in \{(-1; -8), (-1; 8)\} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

2. Do $x = 2 - \sqrt{3}$ là một nghiệm của $f(x) \Rightarrow f(2 - \sqrt{3}) = 0$.

Thế $x = 2 - \sqrt{3}$ vào $f(x)$, ta có: $f(2 - \sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3})^3 + a(2 - \sqrt{3})^2 + b(2 - \sqrt{3}) + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (7a + 2b + 28) - (4a + b + 15)\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 7a + 2b + 28 = (4a + b + 15)\sqrt{3}$.

Do $a, b \in \mathbb{Q}$ nên $7a + 2b + 28$ là số hữu tỉ, $(4a + b + 15)\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Từ đó để phương trình trên thỏa mãn $\Rightarrow \begin{cases} 7a + 2b + 28 = 0 \\ 4a + b + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -7 \end{cases}$ (Thỏa mãn $a, b \in \mathbb{Q}$).

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2 = x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = (x+2)(x^2 - 4x + 1).$$

Gọi k là một nghiệm của $f(x)$, ta có

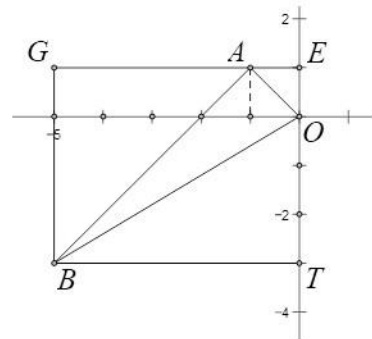
$$f(k) = 0 \Leftrightarrow (k+2)(k^2 - 4k + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k+2=0 \\ k^2 - 4k + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy nghiệm còn lại của $f(x)$ là $-2; 2 + \sqrt{3}$.

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $4x^2 + 3x + 2 = 3\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \sqrt{x - y} = 2y + 1 + \sqrt{y + 1} \\ 8x^3 - 52y^2 - 15x + 11 = (x + 3)\sqrt[3]{12y^2 + 6x - 5} \end{cases}$$



Lời giải.

1. ĐKXĐ: $x \geq -2$.

Phương trình tương đương:

$$4x^2 + 3x + 2 = 3\sqrt{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 1} = 3\sqrt{(x+1)^3 + 1} = 3\sqrt{(x+2)(x^2 + x + 1)}.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x+2} = a; \sqrt{x^2 + x + 1} = b \left(\text{ĐK: } a \geq 0; b \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow 4b^2 - a^2 = 4(x^2 + x + 1) - (x + 2) = 4x^2 + 3x + 2.$$

$$\text{Ta có phương trình ẩn } a, b: 4b^2 - a^2 = 3ab \Leftrightarrow a^2 + 3ab - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+4b) = 0.$$

$$\text{Do } a \geq 0; b \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a + 4b \geq 0 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} > 0. \text{ Kết hợp phương trình trên ta có } a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{x^2 + x + 1} \Rightarrow x + 2 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ (Thỏa mãn ĐKXĐ).}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{\pm 1\}$.

2. ĐKXĐ: $x \geq y \geq -1$.

$$\text{Xét phương trình đầu tiên, ta có: } x + \sqrt{x-y} - 2y - 1 - \sqrt{y+1} = 0 \Leftrightarrow (x - 2y - 1) + (\sqrt{x-y} - \sqrt{y+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y - 1) + \frac{(x-y) - (y+1)}{\sqrt{x-y} + \sqrt{y+1}} = 0 \Leftrightarrow (x - 2y - 1) + \frac{x - 2y - 1}{\sqrt{x-y} + \sqrt{y+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y - 1) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x-y} + \sqrt{y+1}} \right) = 0. \text{ Vì } 1 + \frac{1}{\sqrt{x-y} + \sqrt{y+1}} > 1 > 0 \Rightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y = x - 1 \text{ (1).}$$

$$\text{Thế (1) vào phương trình thứ hai, ta có: } 8x^3 - 13(x-1)^2 - 15x + 11 = (x+3)\sqrt[3]{3(x-1)^2 + 6x - 5}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 11x - 2 = (x+3)\sqrt[3]{3x^2 - 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 11x - 2 - (x+3)\sqrt[3]{3x^2 - 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 11x - 2 - (x+3)(2x-1) + (x+3)(2x-1 - \sqrt[3]{3x^2 - 2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 + (x+3) \cdot \frac{(2x-1)^3 - (3x^2 - 2)}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} + \sqrt[3]{(3x^2 - 2)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 + (x+3) \cdot \frac{8x^3 - 15x^2 + 6x + 1}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} + \sqrt[3]{(3x^2 - 2)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (8x^3 - 15x^2 + 6x + 1) \left(1 + \frac{x+3}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} + \sqrt[3]{(3x^2 - 2)^2}} \right) = 0.$$

$$\text{Với } x \geq -1 \text{ ta dễ thấy } 1 + \frac{x+3}{(2x-1)^2 + (2x-1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} + \sqrt[3]{(3x^2 - 2)^2}} > 1 > 0$$

$$\Rightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(8x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{8} \end{cases} \text{ (Thỏa mãn ĐKXĐ).}$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow \text{Thế vào (1) ta có: } 2y = x - 1 = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ (Thỏa mãn ĐKXĐ).}$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{8} \Rightarrow \text{Thế vào (1) ta có: } 2y = x - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8} \Leftrightarrow y = -\frac{9}{16} \text{ (Thỏa mãn ĐKXĐ).}$$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \left\{ (1; 0); \left(-\frac{1}{8}; -\frac{9}{16} \right) \right\}.$$

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{x^2 + yz}{x\sqrt{y+z}} + \frac{y^2 + zx}{y\sqrt{z+x}} + \frac{z^2 + xy}{z\sqrt{x+y}}$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{x} = a; \sqrt{y} = b; \sqrt{z} = c$ (ĐK: $a, b, c > 0; a + b + c = 1$).

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q &= \frac{x^2 + yz}{x\sqrt{y+z}} + \frac{y^2 + zx}{y\sqrt{z+x}} + \frac{z^2 + xy}{z\sqrt{x+y}} = \frac{a^4 + b^2c^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b^4 + c^2a^2}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c^4 + a^2b^2}{c^2\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \left(\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} - \sqrt{b^2+c^2} \right) + \left(\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} - \sqrt{c^2+a^2} \right) + \left(\frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}} - \sqrt{a^2+b^2} \right) \\ &= \left(\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}} \right) - (\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}) \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Bunhia, ta có: $\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \cdot \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}$

$$\geq \frac{(a^2+bc)\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{bc\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Tương tự, ta có: $\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} \geq \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{ca\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{b^2\sqrt{c^2+a^2}};$

Tương tự, ta có: $\frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}} \geq \frac{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{ab\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}.$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}} \geq \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{\sqrt{b^2+c^2}} \\ & + \frac{bc\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{ca\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ & + \frac{ab\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{c^2\sqrt{a^2+b^2}} = \left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \\ & + \left(\frac{bc\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{ca\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{ab\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{c^2\sqrt{a^2+b^2}} \right) \quad (1). \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta lại có: $\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{c^2+a^2}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \\
&\geq \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{\sqrt{b^2+c^2}} \cdot \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{c^2+a^2}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{c^2+a^2}} \cdot \frac{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}}} \\
&+ \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{\sqrt{b^2+c^2}} \cdot \frac{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}
\end{aligned}$$

Tương tự ta có: $\frac{bc\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{ca\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{ab\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}$

Tương tự ta có: $\geq a\sqrt{\frac{b^2+c^2}{bc}} + b\sqrt{\frac{c^2+a^2}{ca}} + c\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow VP_{(1)} &\geq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} + a\sqrt{\frac{b^2+c^2}{bc}} + b\sqrt{\frac{c^2+a^2}{ca}} + c\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}} \\
&\geq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} + a\sqrt{\frac{2bc}{bc}} + b\sqrt{\frac{2ca}{ca}} + c\sqrt{\frac{2ab}{ab}} \quad (\text{Áp dụng BĐT Cauchy}) \\
&= \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} + (a+b+c)\sqrt{2} = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} + \sqrt{2} \quad (2).
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}$

Từ (1) và (2) $\geq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} + \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Q &= \left(\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}} \right) - (\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}) \\
&\geq (\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} + \sqrt{2}) - (\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}) = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Vậy $\text{Min}Q = \sqrt{2}$. Đạt được khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hay $x = y = z = \frac{1}{9}$.

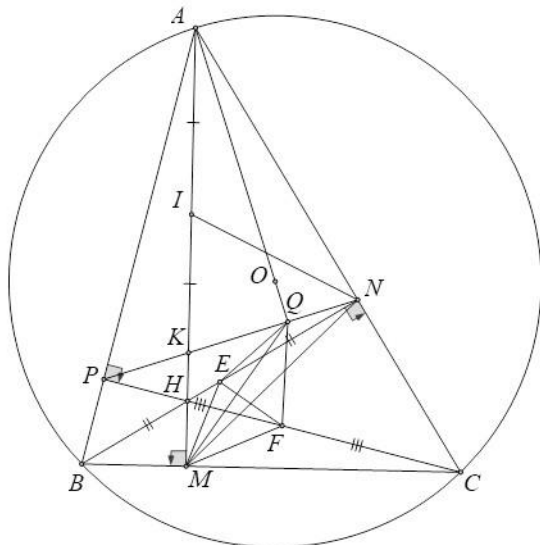
Bài 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H . Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của NP với AH và AO, I là trung điểm của AH .

1. Chứng minh: $IN^2 = IK \cdot IM$.

2. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BN và CP . Chứng minh EF vuông góc với QM .

Lời giải.



1. Xét $\triangle ANB$ và $\triangle APC$ có $\widehat{BAC}$ chung; $\widehat{ANB} = \widehat{APC} = 90^\circ \Rightarrow \triangle ANB \sim \triangle APC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AN}{AP} = \frac{AB}{AC}$ (1).

Xét $\triangle ANP$ và $\triangle ABC$ có (1) và $\widehat{BAC}$ chung $\Rightarrow \triangle ANP \sim \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ANP} = \widehat{ABC}$.

Tương tự ta có $\widehat{MNC} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{MNC} = \widehat{ANP} \Leftrightarrow 90^\circ - \widehat{MNC} = 90^\circ - \widehat{ANP} \Leftrightarrow \widehat{PNH} = \widehat{MNH}$ (2).

Xét $\triangle ANH$ vuông ở N có I là trung điểm AK $\Rightarrow IN = IA = IK$ hay $\triangle INH$ cân ở I $\Rightarrow \widehat{INH} = \widehat{IHN}$

$\Leftrightarrow \widehat{INK} + \widehat{KNH} = \widehat{IHN}$. Mà $\widehat{IHN} = \widehat{IMN} + \widehat{MNH}$ (góc ngoài của $\triangle MNH$) $\Rightarrow \widehat{INK} + \widehat{KNH} = \widehat{IMN} + \widehat{MNH}$

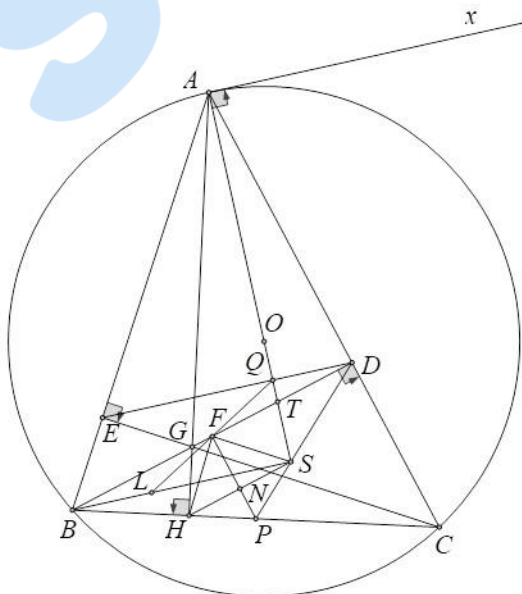
Kết hợp với (2) $\Rightarrow \widehat{INK} = \widehat{IMN}$ (3). Xét $\triangle INK$ và $\triangle IMN$ có (3) và $\widehat{MIN}$ chung

$\Rightarrow \triangle INK \sim \triangle IMN$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IN}{IK} = \frac{IM}{IN} \Rightarrow IN^2 = IK \cdot IM$ (đpcm).

2. Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AH, BD, CE cắt nhau ở G . Gọi F là trung điểm BD , Q là giao điểm của AO và DE . Chứng minh rằng $QF = HF$.

Chứng minh:



Kẻ tiếp tuyến Ax (Tia Ax khác phía B với bờ AC). Qua B kẻ đường thẳng song song với DE , cắt AO tại S . Gọi P, T, L, N lần lượt là giao điểm của DS và BC , BD và AO , QF và BS , SH và PF .

Chứng minh tương tự câu 5.1 ta có $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, mà $\widehat{xAD} = \widehat{ABC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{xAD}$ và ở vị trí so le trong $\Rightarrow Ax \parallel DE$, mà $DE \parallel BS, Ax \perp AO \Rightarrow DE \perp AO; BS \perp AO$.

Do $DE \parallel BS \Rightarrow \frac{QF}{FL} = \frac{DF}{BF} = 1 \Rightarrow QF = LF$. Xét $\triangle QLS$ vuông ở S có $QF = LF \Rightarrow QF = LF = FS$ (1).

Xét $\triangle BTS$ và $\triangle ATD$ có $\widehat{BTS} = \widehat{ATD}$ (hai góc đối đỉnh), $\widehat{BST} = \widehat{ADT} = 90^\circ \Rightarrow \triangle BTS \sim \triangle ATD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BT}{ST} = \frac{AT}{DT}$ (2), $\widehat{TBS} = \widehat{TAD}$ (3). Xét $\triangle BTA$ và $\triangle STD$ có (2) và $\widehat{ATB} = \widehat{DTS}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle BTA \sim \triangle STD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAT} = \widehat{TDS}$ (4). Tương tự ta có: $\widehat{BSH} = \widehat{BAH}$ (5).

Dễ dàng nhận thấy rằng $\widehat{BAH} = \widehat{QAD}$ (6), kết hợp (3) và (5) $\Rightarrow \widehat{TBS} = \widehat{BSH}$ và ở vị trí so le trong $\Rightarrow BD \parallel HS$.

Xét $\triangle BPD$ có $BD \parallel HS \Rightarrow \frac{HN}{SN} = \frac{BF}{DF} = 1$ (Áp dụng định lý Thales) $\Rightarrow HN = SN$ (7).

Từ (6), ta có: $\widehat{BAH} + \widehat{HAT} = \widehat{HAT} + \widehat{QAD} \Leftrightarrow \widehat{BAT} = \widehat{HAD}$, lại có $\widehat{DBC} = \widehat{HAC}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$) và (4)

$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{TDS}$, từ đây dễ suy ra $\triangle BPD$ cân ở P , mà $BF = DF \Rightarrow PF \perp BD$.

Mà $BD \parallel HS$ (Chứng minh trên) $\Rightarrow PF \perp HS$. Kết hợp với (7) $\Rightarrow PF$ là đường trung trực của $HS \Rightarrow HF = FS$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow QF = HF$ (đpcm).

Trở lại bài toán:

Áp dụng bổ đề trên vào $\triangle ABC$ có E và F lần lượt là trung điểm của đường cao BN và đường cao CP $\Rightarrow QE = ME; QF = MF \Rightarrow EF$ là đường trung trực của $QM \Rightarrow EF \perp QM$ (đpcm).

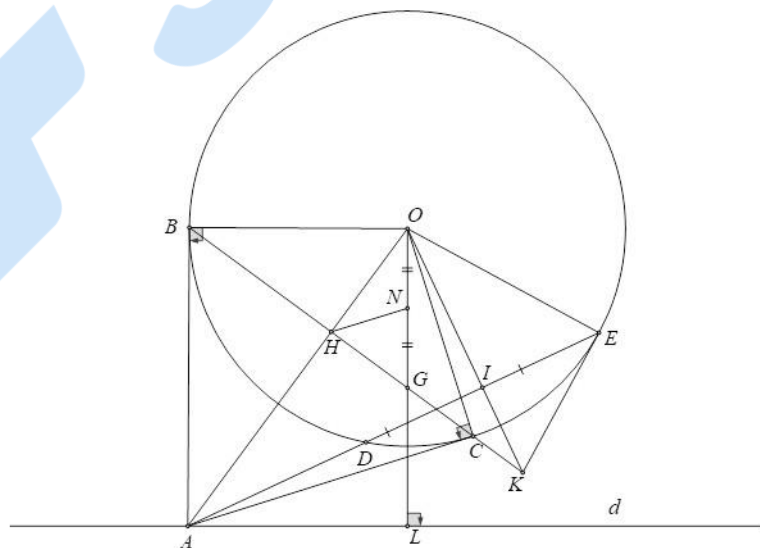
Bài 6. (3,0 điểm)

Cho đường thẳng (d) và đường tròn $(O; R)$ không giao nhau. Trên đường thẳng (d) lấy điểm A . Từ điểm A kẻ tiếp tuyến AB, AC với $(O; R)$, (B, C là tiếp điểm) và cát tuyến ADE không đi qua tâm O , (D nằm giữa A và E). Gọi I là trung điểm của DE . Đường thẳng BC cắt OA và OI lần lượt tại H và K .

1. Chứng minh rằng KE là tiếp tuyến của $(O; R)$.

2. Chứng minh rằng khi A di động trên (d) thì H di động trên một đường tròn cố định.

Lời giải.



1. Xét (O) có I là trung điểm của dây cung $DE \Rightarrow OI \perp DE$ hay $\widehat{OID} = 90^\circ$.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $AB = AC$, lại có $OB = OC = R \Rightarrow OA$ là đường trung trực của $BC \Rightarrow OA \perp BC$

Xét $\triangle OHK$ và $\triangle OLA$ có $\widehat{OID} = \widehat{OHK} = 90^\circ$; $\widehat{AOK}$ chung $\Rightarrow \triangle OHK \sim \triangle OLA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{OI}{OA}$

$\Rightarrow OI \cdot OK = OH \cdot OA$ (1). Xét $\triangle OAC$ vuông ở C có đường cao $CH \Rightarrow OH \cdot OA = OC^2 = R^2$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow OI \cdot OK = R^2 = OE^2 \Rightarrow \frac{OI}{OE} = \frac{OE}{OK}$ (2). Xét $\triangle OEK$ và $\triangle OIE$ có (2) và $\widehat{EOK}$ chung

$\Rightarrow \triangle OEK \sim \triangle OIE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OEK} = \widehat{OIE} = 90^\circ$, từ đây ta suy ra đpcm.

2. Kẻ $OL \perp (d)$ ($L \in (d)$), OL cắt BK ở G . Gọi N là trung điểm của OL .

Xét $\triangle OHG$ và $\triangle OLA$ có $\widehat{AOL}$ chung; $\widehat{OHG} = \widehat{OLA} = 90^\circ \Rightarrow \triangle OHG \sim \triangle OLA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OH}{OG} = \frac{OL}{OA}$

$\Rightarrow OH \cdot OA = OG \cdot OL$. Lại có $OH \cdot OA = R^2 \Rightarrow OG \cdot OL = R^2$ (3).

Do R cố định và (d) cố định $\Rightarrow OL$ cố định. Kết hợp các điều trên với (3) $\Rightarrow OG$ cố định.

Xét $\triangle OHG$ vuông ở H có N là trung điểm $OG \Rightarrow ON = GN = HN \Rightarrow H \in \left(N; \frac{OG}{2}\right)$.

Do OG cố định và N là trung điểm OG nên suy ra N cố định, từ đó ta có đpcm.

Bài 7. (2,0 điểm)

Cho a, b là các số nguyên, $a \neq -1, b \neq -1$ thỏa mãn: $\frac{(a-1)(a+1)^2 + (b-1)(b+1)^2}{a+b+ab+1}$ là số nguyên.

Chứng minh: $a^{2023}b^{2024} - a$ chia hết cho $a^2 + a$.

Lời giải. Điều cần chứng minh tương đương: $(a^{2022}b^{2024} - 1) : (a+1) \Leftrightarrow ((a^{2022}b^{2024} - 1) + (a+1)) : (a+1)$
 $\Leftrightarrow (a^{2022}b^{2024} + a) : (a+1) \Leftrightarrow a(a^{2021}b^{2024} + 1) : (a+1) \Leftrightarrow (a^{2021}b^{2024} + 1) : (a+1)$ (Do $(a, a+1) = 1$).

Cứ làm tương tự như vậy, cuối cùng điều cần chứng minh tương đương $(b^{2024} - 1) : (a+1)$ (1).

Do $\frac{(a-1)(a+1)^2 + (b-1)(b+1)^2}{a+b+ab+1}$ là số nguyên $\Rightarrow ((a-1)(a+1)^2 + (b-1)(b+1)^2) : (a+b+ab+1)$
 $\Leftrightarrow ((a-1)(a+1)^2 + (b-1)(b+1)^2) : (a+1)(b+1)$ (2).

Gọi $(a+1, b+1) = d$ (ĐK: $d \geq 1$) $\Rightarrow a+1 = dq; b+1 = dk$ (ĐK: $q, k \in \mathbb{N}^*; (q, k) = 1$)

$\Leftrightarrow a = dq - 1; b = dk - 1$.

Lúc này (2) trở thành $((dq-2)d^2q^2 + (dk-2)d^2k^2) : dq \cdot dk \Leftrightarrow ((dq-2)q^2 + (dk-2)k^2) : qk$.

Mà $qk : q \Rightarrow ((dq-2)q^2 + (dk-2)k^2) : q \Leftrightarrow (dk-2)k^2 : q$ (3). Vì $(q, k) = 1 \Rightarrow (q, k^2) = 1$.

Kết hợp với (3) $\Rightarrow (dk-2) : q$ (4).

Do $a = dq - 1; b = dk - 1$ nên điều (1) tương đương: $((dk-1)^{2024} - 1) : dq$ (5).

Ta lại có: $(dk-1)^{2024} - 1 = ((dk-1)^2)^{1012} - 1 : ((dk-1)^2 - 1)$ (6).

Lại có: $(dk-1)^2 - 1 = ((dk-1)+1)((dk-1)-1) = dk(dk-2) : dkq$ (Do có (4)). Mà

$dkq : dq \Rightarrow ((dk-1)^2 - 1) : dq$.

Kết hợp với (6) ta suy ra được điều (5) được chứng minh hay bài toán được chứng minh.

Vậy bài toán được chứng minh