

E: ①

Phần 1: Trắc nghiệm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	C	B	A	A	B	D	C	B	C	D	A	D

Phần 2: Tự luận

Câu 1. Điều kiện: $a > 0; a \neq 1; a \neq 4$

a) Thay $a = 16$ (thỏa mãn) vào A ta được:

$$A = \frac{5\sqrt{16} + 4}{\sqrt{16} - 1} = \frac{5 \cdot 4 + 4}{4 - 1} = \frac{24}{3} = 8$$

Vậy

$$b) B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{1-\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} - a}{\sqrt{a} - 2}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{a} + \sqrt{a}}{\sqrt{a}(1 - \sqrt{a})} \cdot \frac{\sqrt{a}(1 - \sqrt{a})}{\sqrt{a} - 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a} - 2}$$

$$c) A \cdot B < 0 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{a} + 4}{\sqrt{a} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a} - 2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\sqrt{a} + 4}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} - 2)} < 0$$

Vì $\sqrt{a} > 0$ (mọi $a \in \mathbb{R}^+$)

$\Rightarrow 5\sqrt{a} + 4 > 0$ (mọi $a \in \mathbb{R}^+$)

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} - 2) < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - 1 < 0 \\ \sqrt{a} - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - 1 > 0 \\ \sqrt{a} - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} < 1 \\ \sqrt{a} > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} > 1 \\ \sqrt{a} < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < 1 \text{ (vô lý)} \\ a > 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a < 4 \end{cases}$$

Kết hợp với đkxđ $\Rightarrow 1 < a < 4$

Mà a nguyên $\Rightarrow a \in \{2, 3\}$

Vậy

Bài 2

a) Vì (P) đi qua M(1; 2) $\rightarrow x=1, y=2$; thay vào (P) ta được

$$2 = a \cdot 1^2$$

$$\Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow (P): y = 2x^2$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P): $y = 2x^2$ và (d): $y = 3x - 1$ ta được

$$2x^2 = 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-1) - (x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị là $(1; 2); (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$$b) \begin{cases} 3x + y = 5m + 15 \\ x + y = 3m + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2m + 6 \\ y = 3m + 9 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = 2m + 6 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } Q = xy - 2x - 1$$

$$= (m+3)(2m+6) - 2(m+3) - 1$$

$$= 2m^2 + 6m + 6m + 18 - 2m - 6 - 1$$

$$= 2m^2 + 10m + 11$$

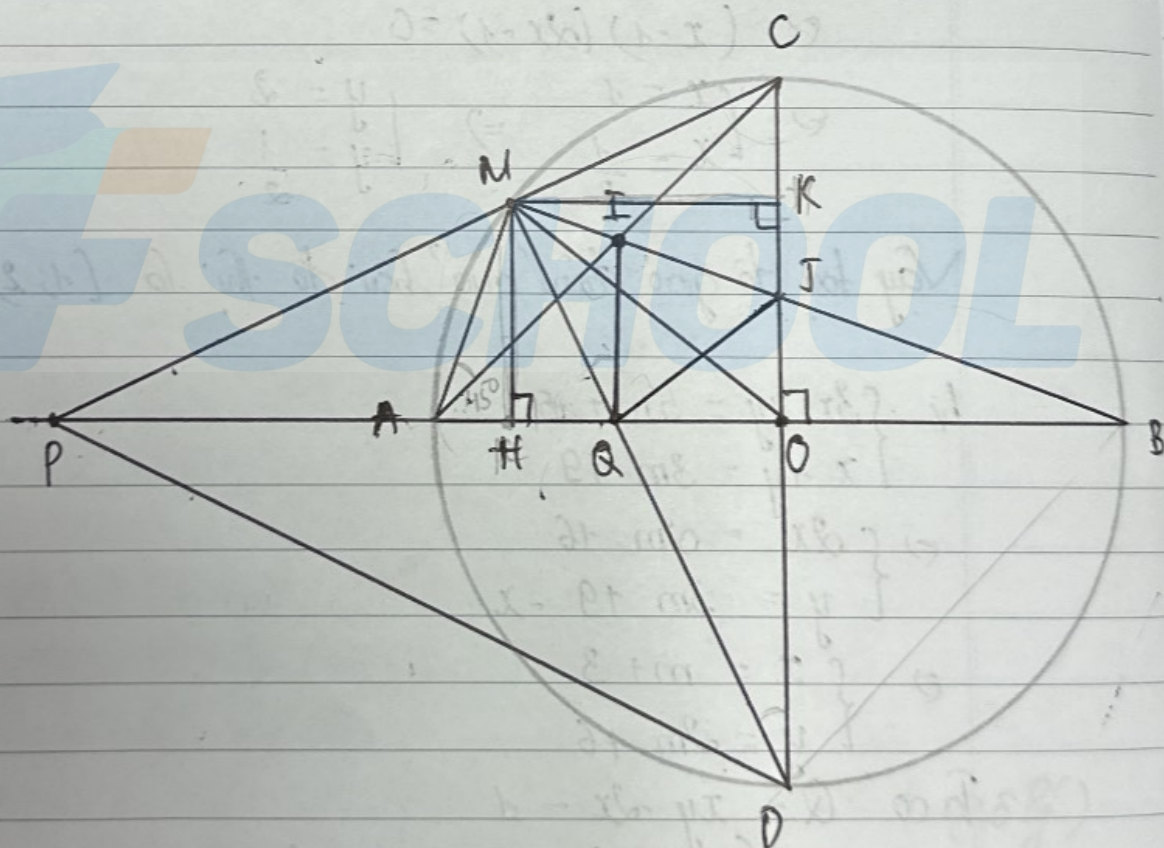
$$= 2(m^2 + 5m) + 11$$

$$= 2\left(m^2 + 2m \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{2} + 11$$

$$= 2\left(m + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

③

Câu 3.



=> OMPD 'nội tiếp'.

(4)

b) Xét (O) có $\widehat{AMB}$ nội tiếp chắn nửa đường tròn
 $\Rightarrow \widehat{AMB} = 90^\circ$

Xét ΔBOI và ΔBMA có:

$$\widehat{BOI} = \widehat{BMA} = 90^\circ$$

$\widehat{ABM}$: chung

$\Rightarrow \Delta BOI \sim \Delta BMA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BO}{BM} = \frac{BI}{BA} \text{ (cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow BI \cdot BM = BO \cdot BA = R \cdot 2R = 2R^2 \text{ (đpcm)}$$

c) Xét (O) có $\widehat{MOA}$ là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{MOA} = \frac{\text{đ} \widehat{AM} + \text{đ} \widehat{BD}}{2}$$

$\widehat{MIA}$ là góc có đỉnh nằm bên trong đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{MIA} = \frac{\text{đ} \widehat{AM} + \text{đ} \widehat{BC}}{2}$$

$$\text{Vì } AB \perp CD \Rightarrow \text{đ} \widehat{BC} = \text{đ} \widehat{BD} = \text{đ} \widehat{AC} = \text{đ} \widehat{AD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MOA} = \widehat{MIA}$$

Xét tứ giác $AMIQ$ có: $\widehat{MIA} = \widehat{MOA}$

Mà hai góc này có đỉnh kề nhau cũng nhìn cạnh AM

$\Rightarrow$ tứ giác $AMIQ$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{MAQ} + \widehat{MIQ} = 180^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{MIQ} + \widehat{QIB} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{QIB}$$

Mà $\widehat{MAB} = \widehat{BIO}$ ($\Delta BOI \sim \Delta BMA$)

$$\Rightarrow \widehat{BIO} = \widehat{QIB}$$

Mà $\angle$ góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow QI \parallel IO$

$$IO \perp AB \Rightarrow QI \perp AB$$

$$\widehat{CAB} \text{ nội tiếp chắn } \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{CAB} = \frac{\text{đ} \widehat{BC}}{2} = 45^\circ$$

⑤

$$\text{Xét } \triangle AQT \text{ có } \widehat{AQT} = 90^\circ$$

$$\widehat{QAT} = 45^\circ$$

$\Rightarrow \triangle AQT$ vuông cân tại Q.

$$d) \text{ Kẻ } MH \perp AB; MK \perp AC$$

$$\Rightarrow R^2 = MH^2 + MK^2 \geq 2MH \cdot MK \quad (1)$$

$$\text{Gọi } \triangle MKJ \text{ có } \triangle BOJ \Rightarrow \frac{KJ}{KO} = \frac{MK}{MK+R}$$

$$\Rightarrow KJ = \frac{MH \cdot MK}{MK+R} \Rightarrow MJ = \frac{MK \cdot \sqrt{2}R}{\sqrt{MK+R}}$$

$$\text{Chứng minh tương tự } MQ = \frac{R \cdot MH \cdot \sqrt{2}R}{\sqrt{MH+R}}$$

$$\Rightarrow MJ \cdot MQ = \frac{2R \cdot MH \cdot MK}{\sqrt{(MH+R)(MK+R)}} \leq \frac{2R \cdot MH \cdot MK}{\sqrt{MH \cdot MK} + R}$$

$$\leq \frac{2R \cdot MH \cdot MK}{\sqrt{MH \cdot MK} + \sqrt{2MH \cdot MK}} \quad (\text{theo (1)})$$

$$\Rightarrow MJ \cdot MQ \leq \frac{2R \cdot \sqrt{MH \cdot MK}}{\sqrt{2} + 1} \leq \frac{\sqrt{2} \cdot R^2}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) \cdot R^2$$

$$\Rightarrow S_{\triangle MJQ} = \frac{1}{2} MJ \cdot MQ \cdot \sin \widehat{MJQ}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} MJ \cdot MQ \leq \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1) \cdot R^2$$

$$\Rightarrow S_{\triangle MJQ} \max = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1) \cdot R^2$$

$\Rightarrow M$ là điểm chính giữa của AC

⑥

Giả 4: $8x^2 - 13x + 11 = \frac{2}{x} + \left(1 + \frac{3}{x}\right) \cdot \sqrt[3]{3x^2 - 2}$

$$\sim 8x^3 - 13x^2 + 11x - 2 = (x+3) \cdot \sqrt[3]{3x^2 - 2}$$

$$\sim (2x)^3 - 3(2x)^2 + 6x - 1 - x^2 + 5x - 1 = (x+3) \cdot \sqrt[3]{3x^2 - 2}$$

$$\sim (2x-1)^3 - (x^2 - 5x + 1) = (x+3) \cdot \sqrt[3]{(2x-1)(x+3) + x^2 - 5x + 1}$$

Đặt $a = 2x - 1$ ta có' hpt.

$$b = \sqrt[3]{(2x-1)(x+3) + x^2 - 5x + 1}$$

$$a^3 = (2x-1)^3$$

$$b^3 = (2x-1)(x+3) + x^2 - 5x + 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^3 - (x^2 - 5x + 1) = (x+3)b \\ b^3 - (x^2 - 5x + 1) = (x+3)a \end{cases}$$

Trừ vế' cho vế' ta được

$$a^3 - b^3 = (x+3)(b-a)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + x+3) = 0$$

$$\text{Do } a^2 + ab + b^2 + x+3 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + x+3$$

$$\gg \frac{2b^2}{4} + x+3$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$a^2 + ab + b^2 + x+3 = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} + x+3 \gg \frac{3a^2}{4} + x+3$$

$$= \frac{3}{4} \cdot (2x-1)^2 + x+3$$

$$= \frac{3}{4} \cdot (4x^2 - 4x + 1) + x+3$$

$$= 3x^2 - 3x + \frac{3}{4} + x+3$$

TLE:

⑦

$$= 3x^2 - 2x + \frac{15}{4} = (\sqrt{3}x)^2 - 2 \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{41}{12}$$

$$= \left(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{41}{12} > 0 \quad (\text{mon } x)$$

$$\Rightarrow a^2 + ab + b^2 + x + 3 > 0$$

$$\Rightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{3x^2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 3x^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(8x^2 - 7x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ 1, \frac{-1}{8} \right\}$$