

**Câu 1.** (2,5 điểm) Cho  $x = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ .

Tính giá trị của biểu thức:  $P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}$

**Câu 2.** (2,5 điểm) Tìm số tự nhiên  $x$ , biết

$$\left( \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2}} \right) \cdot (1 + 2 + \dots + x) = 1612.$$

**Câu 3.** (2,0 điểm) Giải phương trình  $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = x+3$ .

**Câu 4.** (2,0 điểm) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 2xy - 4xz = 10$$

**Câu 5.** (2,0 điểm) Với các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $0 \leq a, b, c \leq 1$  và  $a + b + c = 2$ , tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca}$ .

**Câu 6.** (2,0 điểm) Cho tam giác nhọn  $ABC$  đường cao  $CK$ ;  $H$  là trực tâm của tam giác. Gọi  $M$  là một điểm trên  $CK$  sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ . Gọi  $S; S_1; S_2$  theo thứ tự là diện tích các tam giác  $AMB; ABC; ABH$ .

a) Chứng minh:  $HK \cdot CK = AK \cdot BK$

b) Chứng minh:  $S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$

**Câu 7.** (5,0 điểm) Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AH$  vuông góc với  $BC$ ,  $AD$  là đường phân giác. Gọi  $HM$ ,  $HN$  là đường phân giác của tam giác  $HAB$ ,  $HAC$ .

a. Chứng minh  $DM \parallel AC$  và  $AD = MB$ .

b. Gọi  $AP, AQ$  là đường phân giác của tam giác  $AHB$ ,  $AHC$ .

Chứng minh rằng:  $PQ^2 = 2PB \cdot CQ$ .

**Câu 8.** (1,0 điểm) Cho tam giác đều  $ABC$ , đường cao  $AH$ . Lấy điểm  $M$  nằm giữa  $B$  và  $C$ , vẽ  $MD$  vuông góc với  $AB$  tại  $D$ ,  $ME$  vuông góc với  $AC$  tại  $E$ . Tìm vị trí của điểm  $M$  trên  $BC$  để diện tích  $MDE$  lớn nhất.

**Câu 9.** (1,0 điểm) Bảy người câu được 100 con cá. Biết rằng không có hai người nào câu được số cá như nhau. Chứng minh rằng có ba người câu được tổng cộng không ít hơn 50 con cá.

==== HẾT ====

**Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!**

Họ tên thí sinh.....SBD:.....Phòng thi.....

**Hướng dẫn chung:**

- Học sinh giải theo cách khác mà đúng, đảm bảo tính logic, khoa học thì giám khảo vẫn cho điểm tối đa.
- Các câu hình học, học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai phần nào không chấm điểm phần đó.

| Câu                                                                                                                                                                                                                                                              | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Điểm |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <p><b>Câu 1. (2,5 điểm)</b> Cho <math>x = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}</math>.</p> <p>Tính giá trị của biểu thức: <math>P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12}</math></p>                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |      |
| 2,5 đ                                                                                                                                                                                                                                                            | <p>Ta có:</p> $x = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \text{ với } x > 0$ $\Rightarrow x^2 = 8 + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}$ $= 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5}$                                                                                                                                                                                 | 1,0  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p>Vì <math>x &gt; 0</math> nên <math>x = \sqrt{5} + 1</math></p> <p>Ta có: <math>x = \sqrt{5} + 1 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{5} \Rightarrow (x - 1)^2 = 5 \Rightarrow x^2 - 2x = 4</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,5  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p>Mặt khác ta lại có:</p> $P = \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 12}{x^2 - 2x + 12} = \frac{(x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x) + 12}{x^2 - 2x + 12} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 12}{4 + 12} = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1,0  |
| <p><b>Câu 2. (2,5 điểm)</b> Tìm số tự nhiên <math>x</math>, biết</p> $\left( \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2}} \right) \cdot (1 + 2 + \dots + x) = 1612.$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |      |
| 2,5 đ                                                                                                                                                                                                                                                            | <p>Ta thấy <math>1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^4 + n^2 + 1 + 2n^3 + 2n^2 + 2n}{n^2(n+1)^2}</math></p> $= \frac{(n^2 + n + 1)^2}{n^2(n+1)^2} \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$                                                                                                              | 1,0  |
|                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p>Áp dụng với <math>n = 2, 3, 4, \dots, 14</math> ta có:</p> $\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2}}$ $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + 1 + \frac{1}{14} - \frac{1}{15} = 13 + \frac{1}{2} - \frac{1}{15} = 13\frac{13}{30}$ | 0,75 |

|                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                                                                                                              | <p>Khi đó phương trình đã cho <math>\Leftrightarrow 13 \frac{13}{30} \cdot \frac{x(x+1)}{2} = 1612 \Leftrightarrow \frac{403x(x+1)}{60} = 1612</math></p> <p><math>\Leftrightarrow x(x+1) = 240 \Leftrightarrow x^2 + 2 - 240 = 0 \Leftrightarrow (x-15)(x+16) = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow x-15 = 0</math> (do <math>x+16 \geq 16 &gt; 0</math>) <math>\Leftrightarrow x = 15</math></p> <p>Vậy <math>x = 15</math>.</p> | 0,75 |
| <b>Câu 3. (2,0 điểm) Giải phương trình <math>\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = x+3</math>.</b>                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |      |
|                                                                                                              | Điều kiện xác định $x \geq -\frac{1}{3}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25 |
| 2,0 đ                                                                                                        | <p>Ta có:</p> $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = x+3$ $\Leftrightarrow 4\sqrt{x+3} + 4\sqrt{3x+1} = 4x+12$ $\Leftrightarrow (x+3) - 4\sqrt{x+3} + 4 + 3x+1 - 4\sqrt{3x+1} + 4 = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2)^2 + (\sqrt{3x+1} - 2)^2 = 0$                                                                                                                                                                                           | 0,75 |
|                                                                                                              | <p>Vì <math>(\sqrt{x+3} - 2)^2 \geq 0; (\sqrt{3x+1} - 2)^2 \geq 0</math></p> <p>Nên ta có: <math>\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{3x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 4 \\ 3x+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.</math></p>                                                                                                                                                                         | 0,75 |
|                                                                                                              | Kết hợp với điều kiện xác định: phương trình có nghiệm là $x = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,25 |
|                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |      |
| <b>Câu 4. (2,0 điểm) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: <math>x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 2xy - 4xz = 10</math></b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |      |
| 2,0 đ                                                                                                        | <p>Biến đổi phương trình ta có:</p> $x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 2xy - 4xz = 10$ $\Leftrightarrow [x^2 + 2x(y-2z) + (y-2z)^2] - (y-2z)^2 + 5y^2 + 6z^2 = 10$ $\Leftrightarrow (x+y-2z)^2 + 4y^2 + 4yz + 2z^2 = 10$ $\Leftrightarrow (x+y-2z)^2 + (2y+z)^2 + z^2 = 10$                                                                                                                                                                        | 0,5  |
|                                                                                                              | <p>Do <math>x, y, z</math> là các số nguyên và <math>2y + z + z = 2(y+z)</math> là số chẵn nên <math>(2y+z)^2</math> và <math>z^2</math> là hai số chính phương cùng tính chẵn lẻ.</p> <p>Nên viết: <math>10 = 0^2 + 3^2 + 1^2</math></p>                                                                                                                                                                                            | 0,5  |
|                                                                                                              | <p>Ta xét các trường hợp sau:</p> $1) \begin{cases} (x+y-2z)^2 = 0 \\ (2y+z)^2 = 3^2 \\ z^2 = 1 \end{cases}$ <p>Ta tìm được các nghiệm <math>(x, y, z)</math> là:<br/> <math>(1; 1; 1); (4; -2; 1); (-4; 2; -1); (-1; -1; -1)</math></p>                                                                                                                                                                                             | 0,5  |
|                                                                                                              | $2) \begin{cases} (x+y-2z)^2 = 0 \\ (2y+z)^2 = 1 \\ z^2 = 9 \end{cases}$ <p>Từ đó tìm được các nghiệm <math>(x, y, z)</math> là:</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | (7; -1; 3); (8; -2; 3); (-8; 2; -3); (-7; 1; -3)<br>Vậy phương trình có tất cả 8 nghiệm nguyên.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                 |
| <p><b>Câu 5. (2,0 điểm)</b> Với các số thực <math>a, b, c</math> thỏa mãn <math>0 \leq a, b, c \leq 1</math> và <math>a + b + c = 2</math>, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức <math>P = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca}</math>.</p>                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <p><b>*Tìm giá trị lớn nhất.</b></p> <p>Ta có:</p> $3 - P = \left(1 - \frac{ab}{1+ab}\right) + \left(1 - \frac{bc}{1+bc}\right) + \left(1 - \frac{ca}{1+ca}\right)$ $= \frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \geq \frac{9}{ab+bc+ca+3} \geq \frac{9}{\frac{(a+b+c)^2}{3} + 3} = \frac{27}{13}$ <p>Suy ra: <math>P \leq \frac{12}{13}</math>.</p> <p>Vậy giá trị lớn nhất của <math>P</math> là <math>\frac{12}{13}</math> khi <math>a = b = c = \frac{2}{3}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p>              |
| 2,0 đ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <p><b>*Tìm giá trị nhỏ nhất.</b> Không mất tính tổng quát, giả sử <math>1 \geq a \geq b \geq c \geq 0</math>.</p> <p>Vì <math>0 \leq a, b, c \leq 1</math> nên <math>(a-1)(b-1) \geq 0</math> suy ra <math>ab+1 \geq a+b</math>, dẫn đến <math>\frac{a+b}{ab+1} \leq 1</math>.</p> <p>Chứng minh tương tự: <math>\frac{a+b}{ab+1} + \frac{b+c}{bc+1} + \frac{c+a}{ca+1} \leq 3</math>.</p> <p>Từ đó, <math>2 \cdot (3 - P) = \frac{a+b+c}{ab+1} + \frac{a+b+c}{bc+1} + \frac{a+b+c}{ca+1}</math></p> $\leq 1 + 1 + 1 + \left( \frac{c}{ab+1} + \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} \right) \leq 3 + \frac{a+b+c}{bc+1} \leq 3 + a + b + c = 5.$ <p>Nên ta có <math>3 - P \leq \frac{5}{2} \Rightarrow P \geq \frac{1}{2}</math>.</p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của <math>P</math> là <math>\frac{1}{2}</math> khi <math>a = b = 1, c = 0</math>.</p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
| <p><b>Câu 6. (2,0 điểm)</b> Cho tam giác nhọn <math>ABC</math> đường cao <math>CK</math>; <math>H</math> là trực tâm của tam giác. Gọi <math>M</math> là một điểm trên <math>CK</math> sao cho <math>\widehat{AMB} = 90^\circ</math>. Gọi <math>S; S_1; S_2</math> theo thứ tự là diện tích các tam giác <math>AMB; ABC; ABH</math>.</p> <p>a) Chứng minh : <math>HK \cdot CK = AK \cdot BK</math></p> <p>b) Chứng minh: <math>S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}</math></p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                         |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 2,0 đ | <div data-bbox="305 130 764 510"> </div> <p>a) Xét <math>\triangle HKB</math> và <math>\triangle AKC</math> có:</p> $\widehat{KBH} = \widehat{KCA} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BAC})$ $\widehat{BKH} = \widehat{CKA} (= 90^\circ)$ $\Rightarrow \triangle HKB \sim \triangle AKC (g \cdot g)$ $\Rightarrow \frac{HK}{AK} = \frac{BK}{CK} \Rightarrow HK \cdot CK = AK \cdot BK \quad (1)$ <p>b)</p> $\Rightarrow S_1 \cdot S_2 = \frac{AB^2 \cdot (KH \cdot CK)}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{S_1 S_2} = \frac{AB \cdot \sqrt{KH \cdot CK}}{2}$ <p>Lại có: <math>\triangle AMB</math> vuông ở <math>M</math> có đường cao <math>MK</math></p> $\Rightarrow AK \cdot BK = MK^2 \text{ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông) } (2)$ <p>Từ (1) và (2) <math>\Rightarrow CH \cdot CK = MK^2</math>.</p> <p>Suy ra <math>\sqrt{KH \cdot CK} = MK \quad (3)</math></p> <p>Thay (3) vào (*) ta được:</p> $\sqrt{S_1 S_2} = \frac{AB \cdot MK}{2} = S_{\triangle ANM} = S.$ | 0,5<br>0,25<br>0,25<br><br>0,25<br>0,25<br>0,25<br>0,25 |
|       | <p><b>Câu 7. (5,0 điểm)</b> Cho tam giác <math>ABC</math> vuông tại <math>A</math>, <math>AH</math> vuông góc với <math>BC</math>, <math>AD</math> là đường phân giác. Gọi <math>HM</math>, <math>HN</math> là đường phân giác của tam giác <math>HAB</math>, <math>HAC</math>.</p> <p>a. Chứng minh <math>DM \parallel AC</math> và <math>AD = MB</math>.</p> <p>b. Gọi <math>AP</math>, <math>AQ</math> là đường phân giác của tam giác <math>AHB</math>, <math>AHC</math>.</p> <p>Chứng minh rằng: <math>PQ^2 = 2PB \cdot CQ</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                         |
| 5,0 đ | <div data-bbox="581 1474 1081 1816"> </div> <p>a) Chứng minh <math>MD \parallel AC</math></p> <p>Áp dụng tính chất tia phân giác <math>AD, HM</math> tương ứng của tam giác <math>\triangle ABC, \triangle AHB</math> ta có</p> $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}, \frac{MB}{MC} = \frac{HB}{HA} \quad (1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                         |

Xét  $\triangle ABC$  và  $\triangle HBA$  có

$$\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{BHA} (= 90^\circ) \\ \widehat{ABH} = \widehat{ABC} \end{cases}$$

Suy ra  $\triangle ABC \sim \triangle HBA (g.g) \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MC} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra  $\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MC}$ . Theo định lí Ta-lét đảo ta có  $MD \parallel AC$ .

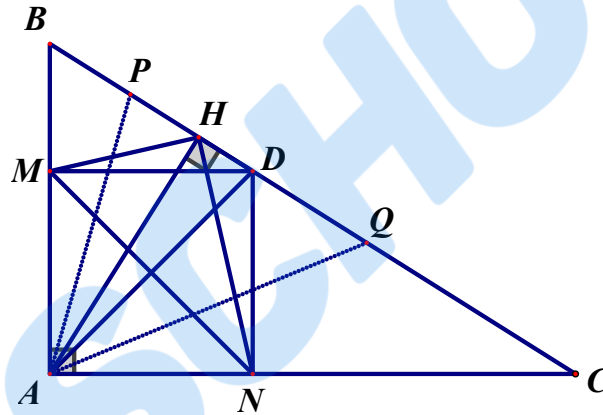
\*Chứng minh  $AD = MN$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có  $DN \parallel AB$

Tứ giác  $AMDN$  có  $\begin{cases} MD \parallel AC \\ DN \parallel AB \end{cases}$  nên  $AMDN$  là hình bình hành.

Lại có  $AD$  là phân giác  $\widehat{MAN}$  nên  $AMDN$  là hình thoi. Hơn nữa,  $\widehat{MAN} = 90^\circ$  khi đó  $AMDN$  là hình vuông. Vậy  $AD = MN$

b) Chứng minh  $PQ^2 = 2PB.CQ$



Ta có  $\widehat{CAP} = \widehat{PAH} + \widehat{HAC}$  và  $\widehat{CPA} = \widehat{PAB} + \widehat{PBA}$  (góc ngoài)

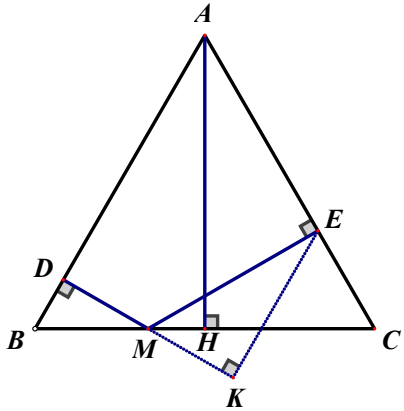
Mà  $\widehat{PAH} = \widehat{PAB}$ ,  $\widehat{HAC} = \widehat{PBA}$  do đó  $\widehat{CAP} = \widehat{CPA} \Rightarrow \triangle CAP$  cân ở  $C \Rightarrow CA = CP$ .

Tương tự  $BA = BQ$ .

Khi đó  $PQ = AB + AC - BC$ ;  $BP = BC - AC$ ;  $CQ = BC - AB$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2BP.CQ &= 2(BC - AC)(BC - AB) \\ &= 2BC^2 - 2BC(AB + AC) + 2AB.AC \\ &= BC^2 + AB^2 + AC^2 - 2BC(AB + AC) + 2AB.AC \\ &= BC^2 - 2BC(AB + AC) + (AB + AC)^2 \\ &= (AB + AC - BC)^2 \\ &= PQ^2. \end{aligned}$$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Vậy $PQ^2 = 2PB.CQ$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |
| <p><b>Câu 8. (1,0 điểm)</b> Cho tam giác đều <math>ABC</math>, đường cao <math>AH</math>. Lấy điểm <math>M</math> nằm giữa <math>B</math> và <math>C</math>, vẽ <math>MD</math> vuông góc với <math>AB</math> tại <math>D</math>, <math>ME</math> vuông góc với <math>AC</math> tại <math>E</math>.<br/> <b>Tìm vị trí của điểm <math>M</math> trên <math>BC</math> để diện tích <math>MDE</math> lớn nhất.</b></p> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |      |
| 1,0 đ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,25 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p>Đặt <math>AB = AC = BC = a, AH = h</math>. Nhận xét <math>a, h</math> là các đại lượng không đổi.</p> <p>Ta có</p> $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} = \frac{MD \cdot AB}{2} + \frac{ME \cdot AC}{2} = \frac{a}{2}(MD + ME) \Rightarrow MD + ME = \frac{2S_{ABC}}{a} \quad (1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p>Hơn nữa <math>S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{ah}{2} \Rightarrow h = \frac{2S_{ABC}}{a} \quad (2)</math></p> <p>Từ (1) và (2) suy ra <math>MD + ME = h</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p>Hạ <math>EK \perp DM</math>, ta có <math>S_{MDE} = \frac{1}{2}DM \cdot EK</math></p> <p>Mà <math>EK = ME \cdot \sin \widehat{EMK}</math> và</p> $\widehat{EMK} = \widehat{CMK} + \widehat{CME} = \widehat{DMB} + \widehat{CME} = (90^\circ - \widehat{B}) + (90^\circ - \widehat{C}) = 60^\circ$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,25 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p>Do đó <math>S_{MDE} = \frac{1}{2}DM \cdot ME \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}DM \cdot ME</math></p> <p>Áp dụng bất đẳng thức <math>ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow DM \cdot ME \leq \frac{(DM + ME)^2}{4} = \frac{h^2}{4}</math></p> <p>Khi đó <math>S_{MDE} = \frac{\sqrt{3}}{4}DM \cdot ME \leq \frac{\sqrt{3}}{8}h^2</math> (không đổi)</p> <p>Dấu “=” xảy ra <math>\Leftrightarrow MD = ME \Leftrightarrow M</math> là trung điểm của <math>BC</math>.</p> <p>Vậy giá trị lớn nhất của <math>S_{MDE}</math> là <math>\frac{h^2\sqrt{3}}{8}</math> (đvdt) khi <math>M</math> là trung điểm của <math>BC</math>.</p> | 0,25 |
| <p><b>Câu 9. (1,0 điểm)</b> Bảy người câu được 100 con cá. Biết rằng không có hai người nào câu được số cá như nhau. Chứng minh rằng có ba người câu được tổng cộng không ít hơn 50 con cá.</p>                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |      |
| 1,0 đ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p><b>Cách 1:</b></p> <p>Gọi <math>a_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \dots, 7</math>, là số con cá mỗi người câu được.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                 |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|  | <p>Giả sử <math>a_1 &lt; a_2 &lt; a_3 &lt; \dots &lt; a_7</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Trường hợp 1: <math>a_4 \leq 14</math>.</li> </ul> <p>Khi đó, <math>a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 14 + 13 + 12 + 11 = 50</math>. Suy ra <math>a_5 + a_6 + a_7 \geq 50</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Trường hợp 2: <math>a_4 &gt; 14</math>.</li> </ul> <p>Khi đó, <math>a_5 + a_6 + a_7 \geq 16 + 17 + 18 = 51</math>.</p> <p>Vậy, <math>a_5 + a_6 + a_7 \geq 50</math>.</p> <p><b>Cách 2:</b></p> <p>Ta sắp xếp các người câu cá theo thứ tự để số cá câu được của họ giảm dần. Như thế người thứ nhất câu được nhiều cá nhất và người thứ bảy câu được ít cá nhất.</p> <p>Nếu người thứ tư câu được không ít hơn 15 con cá, thì ba người đầu câu được không ít hơn <math>16 + 17 + 18 = 51</math> con cá.</p> <p>Nếu người thứ tư câu được 14 con cá hoặc ít hơn thì cả bốn người sau câu được không quá <math>14 + 13 + 12 + 11 = 50</math> con. Như vậy ba người đầu câu được không ít hơn 50 con.</p> <p>Vậy ba người đầu luôn câu được tổng cộng không dưới 50 con cá.</p> | <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|

-----Hết-----