

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG NĂM HỌC 2023- 2024**

**Môn: Toán**

**Lớp: 9**

**Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian phát đề)**

|                                                                                                |                 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| <b>Họ và tên:</b> ..... <b>Lớp:</b> .....<br><b>Số báo danh:</b> ..... <b>Phòng thi:</b> ..... | <b>Mã phách</b> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|

✂-----

| <u>Điểm bằng số</u> | <u>Điểm bằng chữ</u> | <u>Chữ ký của GK1</u> | <u>Chữ ký của GK2</u> | <u>Mã phách</u> |
|---------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------|
|                     |                      |                       |                       |                 |

**Đề:**

**Câu 1:** ( 5 điểm)

1.Cho  $Q = \left( \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} \right) \left( \sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} \right) \sqrt{a^2-2a+1}$  (với  $0 < a < 1$ ).

a) Rút gọn Q.

b) So sánh Q và  $Q^3$ .

2. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}.$$

**Câu 2:** (5 điểm)

a) Trên bảng ban đầu ghi số 2 và số 4. Ta thực hiện cách viết thêm các số lên bảng như sau: nếu trên bảng đã có hai số, giả sử là  $a, b$ ;  $a \neq b$ , ta viết thêm lên bảng số có giá trị là  $a+b+ab$ . Hỏi với cách thực hiện như vậy, trên bảng có thể xuất hiện số 123456 được hay không? Giải thích.

b) Giải phương trình:  $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$ .

**Câu 3:** ( 3 điểm) Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $xy + yz + zx \geq x + y + z$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \geq 1$ .

**Câu 4:** ( 3 điểm) Cho  $\triangle ABC$ , biết rằng  $3A + 2B = 180^\circ$ . Chứng minh:  $AB^2 = BC^2 + AB.AC$

**Câu 5:** (4 điểm) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng AB, AC sao cho  $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$ . Đặt  $AM = x$ ,  $AN = y$

Chứng minh:  $MN = a - x - y$ .

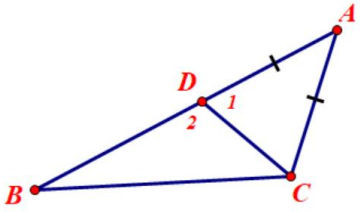
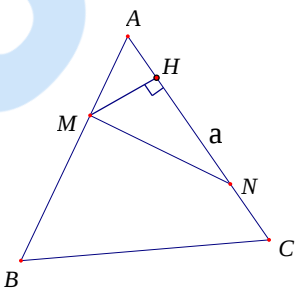
..../....



**HƯỚNG DẪN CHẤM THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TRƯỜNG**  
**MÔN: TOÁN**

| Câu | Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Điểm |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1.1 | <p>a) Với <math>0 &lt; a &lt; 1</math>, ta có:</p> $  \begin{aligned}  Q &= \left( \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{1}{a^2}-1} - \frac{1}{a} \right) \sqrt{a^2-2a+1} \\  &= \left( \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{(1-a)(1+a)}-\sqrt{(1-a)^2}} \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}} - \frac{1}{a} \right) \sqrt{(a-1)^2} \\  &= \left( \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{(1-a)}(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}}{a} - \frac{1}{a} \right)  a-1  \\  &= \left( \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}-1}{a} (1-a) \\  &= \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \cdot \frac{2\sqrt{(1-a)(1+a)}-(1+a)-(1-a)}{2a} (1-a) \\  &= \frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \cdot \frac{-(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})^2}{2a} (1-a) \\  &= -\frac{(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a})(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})}{2a} (1-a) \\  &= -\frac{(1+a)-(1-a)}{2a} (1-a) = -\frac{2a}{2a} (1-a) = a-1.  \end{aligned}  $ | 2,0  |
|     | <p>b) Do <math>1 &gt; a &gt; 0 \Rightarrow 0 &gt; a-1 &gt; -1 \Rightarrow 1 &gt; (a-1)^2 &gt; 0</math>.</p> <p>Xét <math>Q^3 - Q = (a-1)((a-1)^2 - 1) &gt; 0</math>. Vậy <math>Q^3 &gt; Q</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 1.0đ |
| 1.2 | <p><math>P = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}</math></p> <p>Với <math>n \in \mathbb{N}^*</math>, ta có:</p> $  \begin{aligned}  \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\  &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}\cdot(n+1-n)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}  \end{aligned}  $ <p>Áp dụng kết quả trên, ta được:</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 2.0đ |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |       |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
|     | $P = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025}}$ $= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |       |
| 2.a | <p>Đặt <math>k = ab + a + b = (a+1)(b+1) - 1</math>.</p> <p>Nếu trong 2 số <math>a, b</math> tồn tại một số chia 3 dư 2 thì <math>k</math> chia 3 dư 2.</p> <p>Ban đầu trên bảng gồm có số 2 và số 4 (một số chia 3 dư 1; một số chia 3 dư 2). Suy ra tại mọi thời điểm, trên bảng luôn chỉ có một số chia 3 dư 1 và các số còn lại chia 3 dư 2. Do đó với cách thực hiện như đề bài, trên bảng không thể xuất hiện số 123456 (Vì số 123456 chia hết cho 3).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 2,5đ  |
| 2.b | <p>Điều kiện xác định: <math>x \geq 1</math>.</p> <p>Ta có: <math>x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x) \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0</math></p> <p>Đặt <math>x + \sqrt{x-1} = y</math> (điều kiện <math>y \geq 1</math>).</p> <p>Phương trình trở thành <math>y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3</math> (do <math>y \geq 1</math>)</p> <p>Khi đó: <math>x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2</math></p> <p>Vậy phương trình có nghiệm duy nhất <math>x = 2</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 2,5 đ |
| 3   | <p>Ta có <math>\sqrt{x^3+8} = \sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{x+2+x^2-2x+4}{2} = \frac{x^2-x+6}{2}</math></p> <p>Tương tự <math>\sqrt{y^3+8} \leq \frac{y^2-y+6}{2}</math>; <math>\sqrt{z^3+8} \leq \frac{z^2-z+6}{2}</math>.</p> <p>- Suy ra <math>\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \geq 2 \cdot \left( \frac{x^2}{x^2-x+6} + \frac{y^2}{y^2-y+6} + \frac{z^2}{z^2-z+6} \right)</math>. (*)</p> <p>- Lại có: <math>\frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{v} + \frac{c^2}{w} \geq \frac{(a+b+c)^2}{u+v+w} \quad \forall a, b, c, u, v, w &gt; 0</math> (1)</p> <p>- Áp dụng (1) và (*) ta thu được</p> $\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}} \geq \frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18} \quad (2)$ <p>Ta cần chứng minh: <math>\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18} \geq 1</math></p> <p><math>\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4(xy+yz+zx) \geq 18-(x+y+z)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow (x+y+z)^2 + (x+y+z) + 2(xy+yz+zx) - 18 \geq 0</math>.</p> <p><math>\Leftrightarrow (x+y+z)^2 + 3(x+y+z) - 18 \geq 0</math> ( Vì <math>xy+yz+zx \geq x+y+z</math> )</p> | 3 đ   |

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|   | $\Leftrightarrow (x+y+z-3)(x+y+z+6) \geq 0. \quad (3)$ <p>Ta có: <math>(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \geq 3(x+y+z)</math> nên <math>x+y+z \geq 3 \Rightarrow (3)</math> đúng.</p> <p>Từ (1), (2), (3) suy ra điều phải chứng minh.</p> <p>Dấu “=” <math>\Leftrightarrow x=y=z=1</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |    |
| 4 |  <p>Ta có <math>2B + 3A = 180^\circ = A + B + C \Rightarrow C = B + 2A &gt; B + A \Rightarrow</math> trong <math>\triangle ABC</math> có góc C lớn nhất <math>\Rightarrow</math> cạnh AB lớn nhất. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho <math>AD=AC</math><br/> <math>\Rightarrow AB \cdot AD = AB \cdot AC</math> (1)</p> <p>Lại có:</p> $D_2 = 180^\circ - D_1 = 180^\circ - \frac{180^\circ - A}{2} = 180^\circ - \frac{2B + 3A - A}{2} = 180^\circ - A + B = ACB$ $\Rightarrow \triangle BDC \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB \cdot BD = BC^2 \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) suy ra : <math>BC^2 + AB \cdot AC = AB \cdot BD + AB \cdot AD = AB \cdot (BD + AD) = AB^2</math></p>                                               | 3đ |
| 5 | <p>Ta có:</p> $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$ $\Leftrightarrow \frac{AM}{AB - AM} + \frac{AN}{AC - AN} = 1$ $\Leftrightarrow \frac{x}{a-x} + \frac{y}{a-y} = 1$ $\Leftrightarrow x(a-y) + y(a-x) = (a-x)(a-y)$ $\Leftrightarrow a^2 - 2ax - 2ay + 3xy = 0$ $\Leftrightarrow a^2 + x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2xy = x^2 + y^2 - xy$ $\Leftrightarrow (a-x-y)^2 = x^2 + y^2 - xy \quad (1)$ <p>Kẻ <math>MH \perp AC</math></p> <p>Ta có <math>MAH = 60^\circ</math> (do <math>\triangle ABC</math> đều)</p> <p><math>\triangle AHM</math> vuông tại H: <math>MH = x \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x</math></p> $AH = x \cdot \cos 60^\circ = \frac{x}{2}$ $HN = y - \frac{x}{2}$ <p>Áp dụng ĐL Pitago trong tam giác vuông <math>\triangle MNH</math></p>  | 4đ |

$$MN^2 = MH^2 + HN^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 - xy \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:  $MN^2 = (a - x - y)^2 \Leftrightarrow MN = |a - x - y|$

Vì  $\frac{x}{a-x} < 1$  nên  $x < \frac{a}{2}$ ;  $\frac{y}{a-y} < 1$  nên  $y < \frac{a}{2}$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2}a \\ y < \frac{1}{2}a \end{cases} \Rightarrow x + y < a \text{ nên } a - (x + y) > 0 \text{ hay } a - x - y > 0$$

Vậy  $MN = a - x - y$  (đpcm)

