**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 2023-2024**

Môn: **TOÁN**
Thời gian: 180 phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi thứ nhất: **05/01/2024**
*(Đề thi gồm 01 trang, có 04 câu)*

**Câu 1** (5,0 *điểm*)
Với mỗi số thực $x$, ta gọi $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $x$.

Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi: $a_n = \dfrac{1}{4^{[-\log_4 n]}}, \forall n \geq 1$. Đặt $b_n = \dfrac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \dfrac{1}{a_1 + a_2}\right), \forall n \geq 1$.

a) Tìm một đa thức $P(x)$ với hệ số thực sao cho $b_n = P\left(\dfrac{a_n}{n}\right), \forall n \geq 1$.

b) Chứng minh rằng tồn tại một dãy số nguyên dương $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tăng thực sự sao cho

$$\lim_{k \to \infty} b_{n_k} = \frac{2024}{2025}.$$

**Câu 2** (5,0 *điểm*)
Tìm tất cả các đa thức $P(x)$, $Q(x)$ với hệ số thực sao cho với mỗi số thực $a$ thì $P(a)$ là nghiệm của phương trình: $x^{2023} + Q(a).x^2 + (a^{2024} + a)x + a^3 + 2025a = 0$.

**Câu 3** (5,0 *điểm*)
Cho $ABC$ là tam giác nhọn với tâm đường tròn ngoại tiếp $O$. Gọi $A'$ là tâm của đường tròn đi qua $C$ và tiếp xúc $AB$ tại $A$, gọi $B'$ là tâm của đường tròn đi qua $A$ và tiếp xúc $BC$ tại $B$, gọi $C'$ là tâm đường tròn đi qua $B$ và tiếp xúc $CA$ tại $C$.

a) Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ lớn hơn hoặc bằng diện tích tam giác $ABC$.

b) Gọi $X, Y, Z$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $O$ lên các đường thẳng $A'B', B'C', C'A'$. Biết rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $XYZ$ lần lượt cắt lại các đường thẳng $A'B', B'C', C'A'$ tại các điểm $X', Y', Z'$ $(X' \neq X, Y' \neq Y, Z' \neq Z)$. Chứng minh rằng các đường thẳng $AX', BY', CZ'$ đồng quy.

**Câu 4** (5,0 *điểm*)
Người ta xếp $k$ viên bi vào các ô của một bảng $2024 \times 2024$ ô vuông sao cho hai điều kiện sau được thỏa mãn: mỗi ô không có quá một viên bi và không có hai viên bi nào được xếp ở hai ô kề nhau (hai ô được gọi là kề nhau nếu chúng có chung một cạnh).

a) Cho $k = 2024$. Hãy chỉ ra một cách xếp thỏa mãn cả hai điều kiện trên mà khi chuyển bất kì viên bi đã được xếp nào sang một ô tùy ý kề với nó thì cách xếp mới không còn thỏa mãn cả hai điều kiện nêu trên.

b) Tìm giá trị $k$ lớn nhất sao cho với mọi cách xếp $k$ viên bi thỏa mãn hai điều kiện trên ta có thể chuyển một trong số các viên bi đã được xếp sang một ô kề với nó mà cách xếp mới vẫn không có hai viên bi nào được xếp ở hai ô kề nhau.

------------------- HẾT -------------------

** Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;*
** Giám thị KHÔNG giải thích gì thêm.*

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 2023-2024**

Môn: **TOÁN**
Thời gian: 180 phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi thứ hai: **06/01/2024**
*(Đề thi gồm 01 trang, có 03 câu)*

**Câu 5** (6,0 *điểm*)

Với mỗi đa thức $P(x)$, ta đặt

$$P_1(x) = P(x), \forall x \in \mathbb{R};$$
$$P_2(x) = P(P_1(x)), \forall x \in \mathbb{R};$$
$$\dots$$
$$P_{2024}(x) = P(P_{2023}(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $a$ là số thực lớn hơn 2. Tồn tại hay không một đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện: với mỗi $t \in (-a\,;\,a)$, phương trình $P_{2024}(x) = t$ có đúng $2^{2024}$ nghiệm thực phân biệt?

**Câu 6** (7,0 *điểm*)

Với mỗi số nguyên dương $n$, gọi $\tau(n)$ là số các ước nguyên dương của $n$.

a) Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\tau(n) + 2023 = n$ với $n$ là ẩn số.

b) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương $k$ sao cho có đúng hai số nguyên dương $n$ thỏa mãn phương trình $\tau(kn) + 2023 = n$.

**Câu 7** (7,0 *điểm*)

Trong không gian, cho đa diện lồi $D$ sao cho tại mỗi đỉnh của $D$ có đúng một số chẵn các cạnh chứa đỉnh đó. Chọn ra một mặt $F$ của $D$. Giả sử ta gán cho mỗi cạnh của $D$ một số nguyên dương sao cho điều kiện sau được thỏa mãn: với mỗi mặt (khác mặt $F$) của $D$, tổng các số được gán với các cạnh của mặt đó là một số nguyên dương chia hết cho 2024. Chứng minh rằng tổng các số được gán với các cạnh của mặt $F$ cũng là một số nguyên dương chia hết cho 2024.

-------------------- HẾT --------------------

** Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;*
** Giám thị KHÔNG giải thích gì thêm.*

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA**
**TRUNG HỌC PHỔ THÔNG**
**NĂM HỌC 2023-2024**

**HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi thứ nhất: **05/01/2024**
*(Hướng dẫn chấm thi có 09 trang)*

## I. HƯỚNG DẪN CHUNG

1. Giám khảo chấm đúng như Đáp án - Thang điểm của Bộ Giáo dục và Đào tạo.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo Hướng dẫn chấm.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

## II. ĐÁP ÁN - THANG ĐIỂM

| Câu | Ý | Đáp án |
|---|---|---|
| **1** | **a** | Với mỗi $n>1$, tồn tại duy nhất $k\in\mathbb{N}$ sao cho $4^k<n\le 4^{k+1}$. Khi đó $a_n=4^{k+1}$, hay $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{4^{k+1}}{n}$. Dễ thấy $a_1=1, a_2=4$. Khi đó:<br>$n^2b_n=4^0+(4^1-4^0).4^1+(4^2-4^1).4^2+\ldots+(4^k-4^{k-1}).4^k+(n-4^k).4^{k+1}-\dfrac{1}{5}$<br>$=1+3\left(4^1+4^3+\ldots+4^{2k-1}\right)-4^{2k+1}+n.4^{k+1}-\dfrac{1}{5}$<br>$=n.4^{k+1}-\dfrac{4^{2k+2}}{5}.$<br>Suy ra $b_n=\dfrac{4^{k+1}}{n}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{4^{k+1}}{n}\right)^2=\dfrac{a_n}{n}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{a_n}{n}\right)^2$, $\forall n\ge 2$.<br>Khi $n=1$ ta có: $b_1=a_1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{a_1}{1}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{a_1}{1}\right)^2$.<br>Vậy đa thức $P(x)=-\dfrac{1}{5}x^2+x$ thỏa mãn $b_n=P\left(\dfrac{a_n}{n}\right)$, $\forall n\ge 1$. |
| | **b** | Đặt $d=\dfrac{2024}{2025}$. Khi đó phương trình $X-\dfrac{1}{5}X^2=d$ có hai nghiệm<br>$X_{1,2}=\dfrac{5\mp\sqrt{25-20d}}{2}\in(1;\,4).$<br>**Nhận xét:** $\exists\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\to\infty$: $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_{n_k}}{n_k}=X_1$. |

Thật vậy, do $1 < X_1 < 4$ nên nếu chọn

$$n_k = \left[\frac{4^k}{X_1}\right] + 1,\ \forall k \ge 1 \Rightarrow 4^{k-1} < n_k \le 4^k \Rightarrow a_{n_k} = 4^k.$$ Ta có:

$$\frac{4^k}{\dfrac{4^k}{X_1}+1} \le \frac{a_{n_k}}{n_k} = \frac{4^k}{\left[\dfrac{4^k}{X_1}\right]+1} < \frac{4^k}{\left(\dfrac{4^k}{X_1}\right)}$$

$$X_1$$

Vậy $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{a_{n_k}}{n_k} = X_1$.

Suy ra $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\dfrac{a_{n_k}}{n_k} - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{a_{n_k}}{n_k}\right)^2\right) = X_1 - \dfrac{1}{5}X_1^2 = d \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} b_{n_k} = d.$

**Tổng điểm Câu 1: 5,0 điểm**

**2**

Giả sử $P(x), Q(x)$ là hai đa thức với hệ số thực thỏa mãn điều kiện bài toán.

Với mọi $a \in \mathbb{R}$, do $P(a)$ là nghiệm của phương trình:

$x^{2023} + Q(a).\,x^2 + (a^{2024}+a)x + a^3 + 2025a = 0$ nên

$P^{2023}(a) + Q(a).\,P^2(a) + (a^{2024}+a).\,P(a) + a^3 + 2025a = 0$

$\Leftrightarrow P(a).[P^{2022}(a) + Q(a).\,P(a) + (a^{2024}+a)] = -(a^3 + 2025a).$

Suy ra đa thức $x^3 + 2025x$ chia hết cho đa thức $P(x)$ (*).

a) Xét $P(x) \equiv c \in \mathbb{R}$. Dễ thấy $c \ne 0$. Ta có:

$c^{2023} + Q(a).\,c^2 + (a^{2024}+a).\,c + a^3 + 2025a = 0$

$$\Leftrightarrow Q(a) = -\frac{1}{c}a^{2024} - \frac{1}{c^2}a^3 - \left(\frac{1}{c} + \frac{2025}{c^2}\right)a - c^{2021},\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Vậy $\begin{cases} P(x) \equiv c \ne 0 \\ Q(x) = -\dfrac{1}{c}x^{2024} - \dfrac{1}{c^2}x^3 - \left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{2025}{c^2}\right)x - c^{2021}. \end{cases}$

b) Xét $P(x) = \alpha x + \beta\ (\alpha \ne 0)$.

Từ (*) ta suy ra $\beta = 0$. Khi đó

$\alpha^{2023}a^{2023} + Q(a).\,\alpha^2 a^2 + (a^{2024}+a).\,\alpha a + a^3 + 2025a = 0$

$$\Leftrightarrow Q(a) = -\frac{1}{\alpha}a^{2023} - \alpha^{2021}a^{2021} - \frac{1}{\alpha^2}a - \frac{1}{\alpha} - \frac{2025}{\alpha^2 a},\ \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Suy ra $Q(x) = -\dfrac{1}{\alpha}x^{2023} - \alpha^{2021}x^{2021} - \dfrac{1}{\alpha^2}x - \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{2025}{\alpha^2}.\dfrac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

Vậy $Q(x)$ không là đa thức. Đây là điều vô lý.

c) Xét $P(x)$ là đa thức bậc 2.

Từ (*) ta suy ra $P(x) = \alpha(x^2 + 2025)\ (\alpha \ne 0)$. Ta có:

$$P^{2023}(a)+Q(a).\,P^2(a)+(a^{2024}+a).\,P(a)+a^3+2025a=0$$

$$\Leftrightarrow P^{2022}(a)+Q(a).\,P(a)+(a^{2024}+a)+\frac{1}{\alpha}a=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{2022}(a^2+2025)^{2022}+Q(a).\,\alpha.\,(a^2+2025)+(a^{2024}+a)+\frac{1}{\alpha}a=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{2022}(a^2+2025)^{2022}+Q(a).\,\alpha.\,(a^2+2025)=-\left[a^{2024}+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)a\right]$$

Suy ra đa thức $R(x)=x^{2024}+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)x$ chia hết cho đa thức

$S(x)=x^2+2025.$

Ta có:

$$R(x)=\left[\left(x^4\right)^{506}-(2025^2)^{506}\right]+\left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)x+(2025^2)^{506}\right].$$

Suy ra đa thức $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)x+(2025^2)^{506}$ chia hết cho đa thức $S(x)$.

Điều này là vô lí.

d) Xét $P(x)$ là đa thức bậc 3.

Từ (*) ta suy ra $P(x)=\alpha(x^3+2025x)\ (\alpha\neq 0)$. Với mọi $a\neq 0$, ta có:

$$P^{2023}(a)+Q(a).\,P^2(a)+(a^{2024}+a).\,P(a)+a^3+2025a=0$$

$$\Leftrightarrow P^{2022}(a)+Q(a).\,P(a)+(a^{2024}+a)+\frac{1}{\alpha}=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{2022}(a^3+2025a)^{2022}+Q(a).\,\alpha.\,(a^3+2025a)+(a^{2024}+a)+\frac{1}{\alpha}=0$$

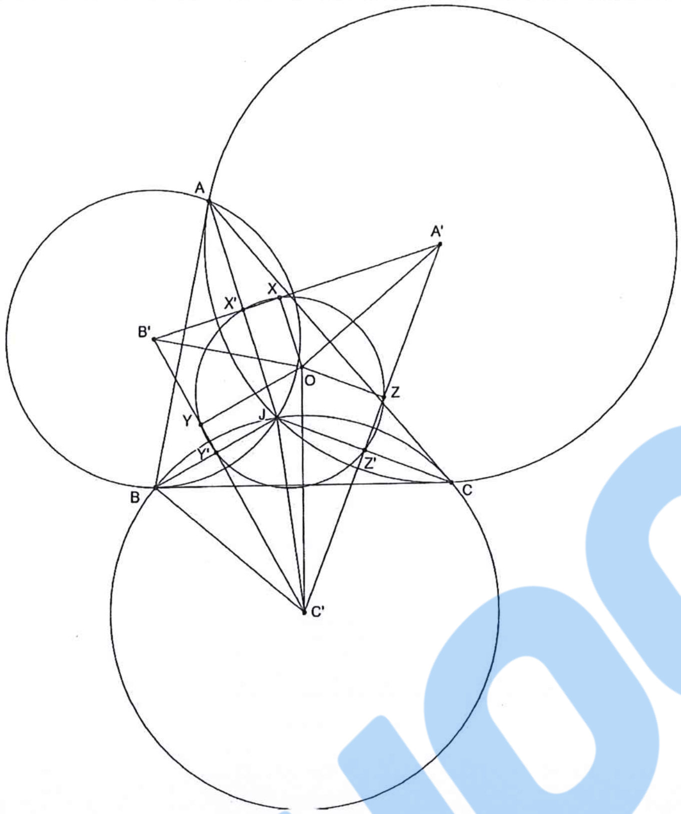
$$\Leftrightarrow a\left[\alpha^{2022}a^{2021}(a^2+2025)^{2022}+Q(a).\,\alpha.\,(a^2+2025)+(a^{2023}+1)\right]+\frac{1}{\alpha}=0,\ \forall a\neq 0.$$

Điều này là vô lí.

**Kết luận:** $\begin{cases} P(x)\equiv c\neq 0 \\ Q(x)=-\dfrac{1}{c}x^{2024}-\dfrac{1}{c^2}x^3-\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{2025}{c^2}\right)x-c^{2021}. \end{cases}$

**Tổng điểm Câu 2: 5,0 điểm**

| | | |
|---|---|---|
| 3 | a | Xét thế hình như dưới đây: |




Gọi $a,b,c$ và $R$ lần lượt là độ dài ba cạnh $BC,CA,AB$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác $ABC$. Ta thấy hình chiếu của $OA'$ trên $AB$ có độ dài bằng $\dfrac{AB}{2}$. Do đó $OA' = \dfrac{AB}{2\sin A} = \dfrac{Rc}{a}$.

Tương tự $OB' = \dfrac{Ra}{b}, OC' = \dfrac{Rb}{c}$. Dễ thấy $\widehat{A'OB'} = 180 - \widehat{A}$. Áp dụng định lý hàm số cosine cho tam giác $OA'B'$, ta được:

$$\begin{aligned} A'B' &= R\sqrt{\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+2\frac{c}{b}\cos A} = \frac{R}{ab}\sqrt{c^2b^2+a^4+a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)} \\ &= R\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}c. \end{aligned}$$

Tương tự, ta có: $B'C' = R\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}a$; $C'A' = R\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}b$.

Do vậy $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA} = \lambda$, với $\lambda = R\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}$.

Từ $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|^2 \geq 0$, suy ra $3R^2 + 2R^2\left(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C\right) \geq 0$.

Hay ta có: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\dfrac{3}{2}$. Do đó:

$$\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}}\ge\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}}$$

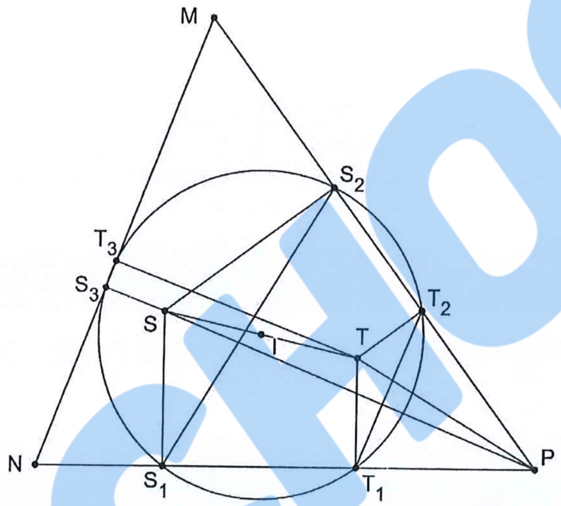
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{18}{(1-\cos 2A)+(1-\cos 2B)+(1-\cos 2C)}}\ge\frac{1}{2}\sqrt{\frac{18}{3+3/2}}=1.$$

Suy ra $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$ (c.c.c) với hệ số đồng dạng $\lambda\ge 1$. Do đó $\Delta A'B'C'$ có diện tích lớn hơn hoặc bằng diện tích $\Delta ABC$.

**Chú ý:** Học sinh có thể chứng minh hệ số đồng dạng $\lambda \ge 1$ bằng cách khảo sát tính lồi của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

**b** Ta chứng minh bổ đề sau.

*Bổ đề. Nếu $S,T$ là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác $MNP$ thì các hình chiếu của $S,T$ lên các đường thẳng $MN,NP,PM$ cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm $I$ của $ST$.*




Thật vậy, gọi $I$ là trung điểm của $ST$; gọi $S_1,S_2,S_3$ là hình chiếu của $S$ nên $NP,PM,MN$; gọi $T_1,T_2,T_3$ là hình chiếu của $T$ lên $NP,PM,MN$. Ta thấy hai tam giác vuông $SPS_1$ và $TPT_2$ đồng dạng ngược hướng (vì là ảnh của nhau qua phép vị tự đối xứng với tâm $P$ và trục là phân giác góc $\widehat{MPN}$). Suy ra $(SP,SS_1)=(TT_2,TP)$ (mod $\pi$).

Hơn nữa, vì các tứ giác $S_1SS_2P, T_1TT_2P$ nội tiếp nên:

$$(T_1T_2,T_1P)=(TT_2,TP)=(SP,SS_1)=(S_2P,S_2S_1)\ (\text{mod }\ \pi).$$

Hay $(T_1T_2,T_1S_1)=(S_2T_2,S_2S_1)$ $(\text{mod}\,\pi)$. Vậy bốn điểm $S_1,S_2,T_1,T_2$ cùng nằm trên một đường tròn có tâm là giao điểm của trung trực $S_1T_1$ và trung trực $S_2T_2$, hay bốn điểm $S_1,S_2,T_1,T_2$ cùng nằm trên một đường tròn tâm $I$. Tương tự, bốn điểm $S_1,S_3,T_1,T_3$ cùng nằm trên một đường tròn tâm $I$, bốn điểm $S_2,T_2,S_3,T_3$ cùng nằm trên một đường tròn tâm $I$. Vậy sáu điểm $S_1,S_2,S_3,T_1,T_2,T_3$ cùng nằm trên một đường tròn tâm $I$. Bổ đề được chứng minh.

| | | |
|---|---|---|
| | | *Quay lại chứng minh của bài toán.* Gọi $J$ là giao điểm khác $A$ của các đường tròn $(A', A'A)$ và $(B', B'B)$. Ta có $$\widehat{CJA} = 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{CA'A}}{2} = 180^\circ - \widehat{OA'A} = 180^\circ - \widehat{CAB}.$$ Tương tự $\widehat{AJB} = 180^\circ - \widehat{ABC}$. Suy ra $\widehat{BJC} = 360^\circ - \widehat{CJA} - \widehat{AJB} = \widehat{CAB} + \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BCA} = 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{BC'C}}{2}$. Do đó $J \in (C', C'C)$. Vậy ta có $A'B', B'C', C'A'$ lần lượt là trung trực của $JA, JB, JC$. Do đó $\widehat{JC'B'} = \frac{\overset{\frown}{JC'B}}{2} = \widehat{JCB}$. Mặt khác $\widehat{JCB} = \widehat{A'C'O}$ (vì $JC \perp C'A', CB \perp C'O$). Suy ra $\widehat{JC'B'} = \widehat{A'C'O}$. Tương tự $\widehat{JB'A'} = \widehat{C'B'O}, \widehat{JA'C'} = \widehat{B'A'O}$, hay $J$ và $O$ là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác $A'B'C'$. Do đó, theo bổ đề ta thấy $X', Y', Z'$ là hình chiếu của $J$ lên $A'B', B'C', C'A'$. Vì vậy $(J, A, X')$, $(J, B, Y')$, $(J, C, Z')$ là các bộ ba thẳng hàng. Vậy $AX', BY', CZ'$ đồng quy tại điểm $J$. **Chú ý:** Học sinh có thể chứng minh $O, J$ là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác $A'B'C'$ bằng cách chứng minh bổ đề: "*điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác $A'B'C'$ của điểm $J$ là tâm của đường tròn đi qua các điểm đối xứng của $J$ qua các cạnh của tam giác $A'B'C'$.*" |
| | | **Tổng điểm Câu 3: 5,0 điểm** |
| **4** | **a** | Ta xếp 2024 viên bi trên các ô của đường chéo chính. Rõ ràng cách xếp này thỏa mãn điều kiện: không có hai viên nào được xếp ở hai ô kề nhau. Khi đó nếu di chuyển bất kỳ viên nào sang một trong các ô kề với nó thì sẽ có hai viên bi ở hai ô kề nhau. |
| | **b** | Ta sẽ chứng minh nếu đặt 4045 viên bi tuỳ ý vào bảng ô vuông $2024 \times 2024$ sao cho không có hai viên bi nào được đặt ở hai ô kề nhau thì có thể chuyển một viên bi sang ô kề nó để điều kiện bài toán được thoả mãn.<br>Phản chứng: Giả sử không thể di chuyển bất kỳ viên bi nào để thoả mãn bài toán. Ta tô màu bảng vuông theo quy tắc bàn cờ, với ô ở hàng dưới cùng cột ngoài cùng bên trái được tô màu đen. Khi đó bảng vuông có một đường chéo chính D gồm 2024 ô màu đen đi từ ô này lên ô ở hàng trên cùng ở cột ngoài cùng bên phải. Bảng có 2024 đường chéo phụ trắng song song với đường chéo D nói trên, trong đó có 1012 đường chéo phụ trắng bao gồm lần lượt 1, 3,..., 2023 ô trắng nằm ở bên trên đường D, và 1012 đường chéo phụ trắng nằm dưới đường D. Ngoài ra bảng cũng có 2023 đường chéo cùng hướng với $D$ bao gồm các ô đen.<br>Giả sử bảng vuông có $W$ viên bi đặt ở các ô trắng và $B$ viên bi đặt ở các ô đen, với $W + B = 4045$. Không mất tính tổng quát, ta có thể coi $W > B$ (trong trường hợp $W < B$ ta sẽ thay $D$ bởi đường chéo chính thứ hai gồm các ô trắng đi từ ô dưới cùng ngoài cùng bên phải lên ô trên cùng ngoài cùng bên phải và lập luận tương tự). |

*Xét các trường hợp sau:*

I. $\boldsymbol{B > 0}$. Khi đó từ điều kiện suy ra $B < 2023$. Theo nguyên lý Dirichlet, phải có ít nhất một đường chéo phụ đen cùng hướng với D là trống. Suy ra phải có một cặp đường chéo liên tiếp nhau $T_1$ và $T_2$ gồm các ô đen sao cho $T_1$ là trống còn $T_2$ có ít nhất một viên bi (ví dụ chúng đều nằm dưới đường chéo D như trên hình vẽ).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | 0 |
| | | | | | | 0 | |
| | | | | | 0 | | x |
| | | | | 0 | | x | |
| | | | 0 | | | | |
| | | 0 | | | | | |

Nếu $T_1$ có nhiều ô hơn $T_2$, ta chọn viên bi nằm trên cùng của đường chéo $T_2$, dịch chuyển nó lên trên về phía $T_1$ và nhận được một cách sắp xếp mới vẫn thoả mãn điều kiện bài toán.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | x |
| | | | | | | x | |
| | | | | | x | | 0 |
| | | | | x | | 0 | |
| | | | x | | 0 | | |
| | | x | | 0 | | | |

Nếu $T_1$ có ít ô hơn $T_2$, khi đó mỗi đường chéo phụ đen cùng hướng với D nằm bên phải của D và phía trên của $T_2$ phải có ít nhất một viên bi (nếu không sẽ đưa về trường hợp ở trên khi $T_1$ nhiều ô hơn $T_2$). Suy ra trên đường chéo $T_2$ phải có đủ bi. Gọi số bi trên $T_2$ là $2k$ ( với $1 \leq k \leq 1011$). Suy ra tổng số bi trên các ô đen ở nửa dưới bên phải của bảng vuông không ít hơn

$$2k + (1011 - k) \times 1 = 1011 + k \geq 1012$$

Suy ra số bi nằm ở các ô đen ở nửa trên đường chéo D nhỏ hơn $2023 - 1012 = 1011$ viên. Do đó có ít nhất một đường chéo đen nằm trên D không có bi. Lại lập luận tương tự suy ra tổng số bi ở trên các ô đen ở nửa trên bên trái của bảng vuông không ít hơn 1012 viên. Vì vậy $B \geq 2024$ (mâu thuẫn).

II. $\boldsymbol{B = 0}$. Khi đó $W = 4045$. Xét tất cả 2024 đường chéo trắng cùng hướng với $D$ (ta gọi tắt là các đường chéo trắng).

a. Xét trường hợp mỗi đường chéo trắng đều có ít nhất một viên bi. Do chỉ có tổng cộng 4045 viên bi, nên phải có ít nhất một đường chéo trắng có đúng một viên bi. Không mất tính tổng quát, giả sử đường chéo này nằm bên trên đường chéo chính D.

Gọi các đường chéo trắng nằm trên D lần lượt là $u_1, u_2, .., u_{1012}$ (đường chéo $u_n$ có $2n - 1$ ô trắng). Khi đó nếu $u_n$ $(2 \leq n \leq 1012)$ có một viên bi thì $u_{n-1}$ cũng chỉ có thể chứa một viên bi (vì nếu $u_{n-1}$ chứa ít nhất hai viên bi thì một trong các viên bi này có thể di chuyển sang phải hoặc xuống dưới một ô về phía $u_n$ để không có hai viên bi nào kề nhau).

Nếu tất cả các đường chéo $u_1, u_2, .., u_{1012}$ đều chỉ chứa một viên bi, bằng lập luận tương tự như trên cũng suy ra lần lượt tất cả các đường chéo trắng nằm dưới D cũng chỉ chứa một viên bi. Do đó, tổng số viên bi nhỏ hơn 4045 (mâu thuẫn).

Vậy phải có một trong các đường chéo $u_1, u_2, .., u_{1012}$ có nhiều hơn một viên bi.

Giả sử $l$ là chỉ số đầu tiên sao cho $u_l$ có nhiều hơn một viên bi. Suy ra $2 \leq l \leq 2012$ và các đường chéo $u_1, u_2, .., u_{l-1}$ có đúng một viên bi theo lập luận trên. Hơn nữa, cũng từ lập luận ở trên, để ý tới vị trí đặc biệt của đường chéo $u_1$ , ta suy ra tất cả các viên bi duy nhất trên các đường chéo $u_1, u_2, .., u_{l-1}$ đều phải nằm ở ô trung tâm của các đường chéo này để không thể dịch chuyển lên trên hoặc sang trái được.

Gọi các ô trắng trên đường chéo $u_l$ theo thứ tự từ dưới lên là $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, a_l, a_l, a_{l+1}, \dots, a_{2l-1}$ (nhắc lại rằng đường chéo $u_l$ có đúng $2l-1$ ô trắng), trong đó ô $a_l$ ở vị trí trung tâm của đường chéo này.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | | | | | | |
| | X | | | | | | |
| | | X | | | | | |
| | X | | | | | | |
| X | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

Ta có nhận xét sau đây:

- Nếu ô $a_j$ không có bi ($2 \le j \le l-1$) thì ô $a_{j-1}$ cũng không thể có bi, vì nếu không ta có thể di chuyển viên bi ở ô $a_{j-1}$ lên trên về phía đường chéo $u_{l-1}$. Do đó, nếu ô $a_j$ có bi ($1 \le j \le l-2$) thì ô $a_{j+1}$ cũng phải có bi.
- Nếu ô $a_j$ có bi ($2 \le j \le l-1$) thì ô $a_{j-1}$ cũng phải có bi, vì nếu không ta có thể di chuyển viên bi ở ô $a_j$ sang trái về phía gần đường chéo $u_{l-1}$.

Suy ra các ô $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ hoặc đồng thời có bi hoặc không đồng thời có bi. Tương tự, các ô $a_{l+1}, \dots, a_{2l-1}$ cũng đồng thời có bi hoặc không đồng thời có bi. Nhưng nếu các ô $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ đều không có bi, thì ô $a_l$ phải có bi, vì nếu không ta có thể di chuyển viên bi ở ô trung tâm của đường chéo $u_{l-1}$ xuống dưới về phía đường chéo $u_l$ để có cách xếp bi thoả mãn cả hai điều kiện đặt ra. Tương tự nếu các ô $a_{l+1}, \dots, a_{2l-1}$ đều không có bi, thì ô $a_l$ phải có bi.

Như vậy ta có các khả năng sau đây:

- $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, a_{l+1}, \dots, a_{2l-1}$ đồng thời có bi. Số bi trên $u_l$ bằng $2l-1$ hoặc $2l-2$ phụ thuộc vào có bi hay không ở $a_l$.
- Các ô liên tiếp $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, a_l$ có bi, các ô $a_{l+1}, \dots, a_{2l-1}$ không có bi. Số bi trên $u_l$ bằng $l$.
- Các ô liên tiếp $a_l, a_{l+1}, \dots, a_{2l-1}$ có bi, các ô $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ không có bi. Số bi trên $u_l$ bằng $l$.
- Các ô $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, a_{l+1}, \dots, a_{2l-1}$ đồng thời không có bi: Loại, do trên $u_l$ phải có ít nhất hai viên bi).

Do $2l-2 \ge l$ với $l \ge 2$, nên trên đường chéo $u_l$ có ít nhất $l$ viên bi. Suy ra trên mỗi đường chéo trong số $u_{l+1}, u_{l+2}, .., u_{1012}$ phải có ít nhất 2 viên bi. Vì vậy số bi có mặt ở nửa trên của đường chéo D không ít hơn

$$(l-1) + l + (1012 - l) \times 2 = 2023$$

Suy ra số bi có mặt ở nửa dưới của đường chéo D không vượt quá $4045 - 2023 = 2022$ viên. Do đó phải có ít nhất một trong số 1012 đường chéo trắng nằm dưới D có đúng một viên bi. Tuy nhiên, bằng lập luận tương tự như đối với các đường chéo $u_1, u_2, .., u_{1012}$, ta cũng suy ra nếu có một đường chéo trắng trong số các đường chéo trắng nằm dưới D có một viên bi thì số bi có mặt ở nửa dưới của đường chéo D không ít hơn 2023 viên. Ta nhận được mâu thuẫn.

Giả sử có một đường chéo trắng là trống, ví dụ một trong các đường chéo $u_1, u_2, .., u_{1012}$. Ta thấy tất cả các đường chéo này không thể cùng trống, vì nếu không ta có thể di chuyển một viên bi ở nửa dưới của đường chéo D về phía nửa trên của bảng vuông. Xét một cặp đường chéo trắng liên tiếp $(u_k, u_{k+1})$, $1 \le k \le 1011$, trong đó có trong đó một đường chéo là trống bi, một đường có ít nhất một viên bi. Lập luận tương tự như trường hợp I, ta cũng thấy chỉ cần xét tình huống khi $u_k$ không có bi còn $u_{k+1}$ có ít nhất một viên bi. Khi đó, để không thể di chuyển bi từ đường chéo $u_{k+1}$ sang một ô đen nằm ở đường chéo đen xen giữa $u_k, u_{k+1}$, ta phải có $u_{k+1}$ có đầy đủ $2k+1$ viên bi.

Khi đó dễ dàng thấy mỗi đường chéo $u_j$ với $k+1 < j \leq 2022$ phải có ít nhất 2 viên bi. Suy ra số bi ở nửa trên bên trái đường chéo D không ít hơn

$$2k + 1 + (1012 - k - 1) \times 2 = 2023 \text{ (viên)}.$$

Từ đó ta lại thấy số bi ở nửa dưới bên phải đường chéo D không vượt quá $4045 - 2023 = 2022$ (viên). Có tất cả 1012 đường chéo trắng nằm dưới D, suy ra phải có ít nhất một trong các đường chéo trắng nằm dưới D có không quá 1 viên bi.

Nếu một trong các đường chéo trắng nằm dưới D là trống, ta áp dụng lập luận tương tự như đối với nửa trên D của bảng vuông, sẽ suy ra số bi ở nửa dưới bên phải đường chéo D không ít hơn 2023 (viên).

Nếu tất cả đường chéo trắng nằm dưới D đều có ít nhất 1 viên bi, suy ra có một đường chéo trắng nằm dưới D có đúng một viên bi: ta quay lại tình huống đã xét ở trường hợp a) và suy ra số bi ở nửa dưới của đường chéo D không ít hơn 2023 viên. Ta lại gặp mâu thuẫn.

Vậy nếu đặt $k = 4045$ viên bi tuỳ ý vào bảng ô vuông $2024 \times 2024$ sao cho không có hai viên bi nào được đặt ở hai ô kề nhau thì có thể chuyển một viên bi sang ô kề nó để điều kiện bài toán được thoả mãn.

Ta sẽ chứng minh 4045 là số lớn nhất, nghĩa là với mọi $k > 4046, k \leq \frac{2024^2}{2}$ luôn tồn tại cách xếp không thoả mãn bài toán (rõ ràng rằng để xếp $k$ viên bi sao cho không có hai viên nào ở các ô kề nhau, ta phải có $k \leq \frac{2024^2}{2}$).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | x | | x | | x | | b |
| x | | x | | x | | | |
| | x | | x | | | | x |
| x | | x | | | | x | |
| | x | | | | x | | x |
| x | | | | x | | x | |
| | | | x | | x | | |
| a | | x | | x | | | |

Trước tiên, ta đặt 2 viên bi tại các vị trí đánh dấu $a, b$ như trên. Tiếp theo ta sẽ đặt liên tiếp các viên bi trên $m$ đường chéo phụ xếp lần lượt cách một nằm dưới đường chéo chính D (theo thứ tự giảm dần về số ô) và trên $n$ đường chéo phụ xếp lần lượt cách một nằm trên đường chéo D (lần lượt theo thứ tự giảm dần về số ô), với $1 \leq m \leq 1011, 1 \leq n \leq 1011$. Trên hình vẽ biểu thị trường hợp $m = 2$ và $n = 3$.

Cuối cùng ta đặt thêm $l$ viên bi ($0 \leq l \leq 2022$) trên đường chéo chính nối $a$ và b (khác vị trí của $a$ và $b$). Khi đó tổng số viên bi là $\sum_{i=1}^{m}(2024 - 2i) + \sum_{j=1}^{n}(2024 - 2j) + 2 + l = (2023 - m)m + (2023 - n)n + 2 + l = F(m, n, l)$.

Khi $m$ nhận mọi giá trị từ 1 tới 1011, $n$ nhận mọi giá trị từ 1 tới 1011 và $l$ nhận mọi giá trị từ 0 tới 2022, rõ ràng $F(m, n, l)$ vét tất cả các giá trị $k$ từ 4046 tới $\frac{2024^2}{2}$. Dễ thấy với cách xếp như trên, ta không thể chuyển một viên bi bất kỳ sang một ô kề để thoả mãn điều kiện bài toán.

Vậy $k_{max} = 4045$.

**Tổng điểm Câu 4: 5,0 điểm**

**Tổng điểm ngày 1: 20 điểm**

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA**
**TRUNG HỌC PHỔ THÔNG**
**NĂM HỌC 2023-2024**

**HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC**
Môn: **TOÁN**
Ngày thi thứ hai: **06/01/2024**
*(Hướng dẫn chấm thi có 06 trang)*

## I. HƯỚNG DẪN CHUNG

1. Giám khảo chấm đúng như Đáp án - Thang điểm của Bộ Giáo dục và Đào tạo.
2. Nếu thí sinh có cách trả lời khác nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo Hướng dẫn chấm.
3. Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

## II. ĐÁP ÁN - THANG ĐIỂM

| Câu | Ý | Đáp án |
|---|---|---|
| 5 | | Xét đa thức $P(x)=x^2-a$.<br>Ta chứng minh: với mỗi $t\in(-a\,;a)$, phương trình $P_{2024}(x)=t$ có đúng $2^{2024}$ nghiệm thực phân biệt.<br>Dễ thấy $\deg P_n(x)=2^n, \forall n\geq 1$.<br>Xét dãy đa thức $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định như sau:<br>$P_1(x)=P(x), \forall x\in\mathbb{R};$<br>$\forall n\geq 1: P_{n+1}(x)=P(P_n(x)), \forall x\in\mathbb{R}.$<br>Ta chứng minh khẳng định sau: với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$, với mỗi $t\in\left(-a\,;a\right)$, phương trình $P_n(x)=t$ có đúng $2^n$ nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(-a;a\right)$.<br>Ta chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo $n$.<br>+) Với $n=1$: phương trình $P_1(x)=t$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt là $x_{1,2}=\pm\sqrt{a+t}\in(-a;a)$.<br>+) Giả sử phương trình $P_n(x)=t$ có đúng $2^n$ nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(-a;a\right)$ với mọi $t\in(-a\,;a)$.<br>Xét phương trình $P_{n+1}(x)=t \Leftrightarrow (P_n(x))^2-a=t \Leftrightarrow (P_n(x))^2=a+t$ (*).<br>Do $t\in(-a\,;a)$ nên $a+t>0$ và do đó $-a<-\sqrt{a+t}<0<\sqrt{a+t}<a$. Theo giả thiết quy nạp ta có: mỗi phương trình $P_n(x)=\sqrt{a+t}$; $P_n(x)=-\sqrt{a+t}$ đều có $2^n$ nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(-a;a\right)$.<br>Ta có: (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P_n(x)=-\sqrt{a+t} \\ P_n(x)=\sqrt{a+t} \end{array}\right.$. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Suy ra phương trình $P_{n+1}(x)=t$ có $2^n+2^n=2^{n+1}$ nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(-a;a)$. Vậy khẳng định được chứng minh. |
| | | **Tổng điểm Câu 5: 6,0 điểm** |
| **6** | **a** | Do tập các ước nguyên dương của $n$ có thể viết dưới dạng<br>$S=\left\{d,\dfrac{n}{d}:1\le d\le\sqrt{n},d\mid n\right\}$, ta có $\tau(n)\le 2\sqrt{n}$. Từ phương trình suy ra<br>$n>2023$ và<br>$n\le 2\sqrt{n}+2023\Rightarrow\left(\sqrt{n}-1\right)^2\le 2024\Rightarrow n\le 2115.$<br>Nếu $n$ chẵn thì $\tau(n)$ lẻ nên $n$ là số chính phương chẵn. Điều này không xảy ra vì $46^2>2115, 44^2<2023$.<br>Nếu $n$ lẻ thì $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}$ với $3\le p_1<p_1<\cdots<p_s$ là các số nguyên tố, $\alpha_i\in\mathbb{Z}^+$.<br>Nếu $s\ge 5$ thì $n\ge 3.5.7.11.13>2115$, loại.<br>Nếu $s=4$ thì do $3^2.5.7.11>2115$ ta phải có $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=1$. Lúc này $\tau(n)=16$ nên $n=2039$ là số nguyên tố, loại.<br>Nếu $s=3$ thì do $3^4.5.7>2115$ ta phải có $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\le 5$.<br>- Với $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(1,1,3)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=16$ nên $n=2039$, loại.<br>- Với $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(1,2,2)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=18$ nên $n=2041=13.157$, loại.<br>- Với $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(1,1,2)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=12$ nên $n=2035=5.11.37$, loại.<br>- Với $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(1,1,1)$ thì $\tau(n)=8$ nên $n=2031=3.677$, loại.<br>Nếu $s=2$ thì do $3^6.5>2115$ ta phải có $\alpha_1+\alpha_2\le 6$.<br>- Với $(\alpha_1,\alpha_2)=(1,5)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=12$ nên $n=2035=5.11.37$, loại.<br>- Với $(\alpha_1,\alpha_2)=(2,4)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=15$ nên $n=2038=2.1019$, loại.<br>- Với $(\alpha_1,\alpha_2)=(3,3)$ thì $\tau(n)=16$ nên $n=2039$, loại.<br>- Với $(\alpha_1,\alpha_2)=(1,4)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=10$ nên $n=2033=19.107$, loại.<br>- Với $(\alpha_1,\alpha_2)=(2,3)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=12$ nên $n=2035=5.11.37$, loại.<br>- Với $(\alpha_1,\alpha_2)=(1,3)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=8$ nên $n=2031=3.677$, loại. |

- Với $\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\left(2,2\right)$ thì $\tau(n)=9$ nên $n=2032=2^4.127$, loại.
- Với $\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\left(1,2\right)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=6$ nên $n=2029$, loại.
- Với $\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\left(1,1\right)$ thì $\tau(n)=4$ nên $n=2027$, loại.

Nếu $s=1$ thì do $3^7>2115$ ta phải có $\alpha_1\le 6$. Do $\tau(n)$ chẵn nên $\alpha_1$ lẻ.

- Với $\alpha_1=5$ thì $\tau(n)=6$ nên $n=2029$, loại.
- Với $\alpha_1=3$ thì $\tau(n)=4$ nên $n=2027$, loại.
- Với $\alpha_1=1$ thì $\tau(n)=2$ nên $n=2025=3^4.5^2$, loại.

Vậy không có số nguyên dương $n$ thỏa mãn phương trình.

**b** Ta chứng minh với $k=p$ là số nguyên tố > 2030, thì pt $\tau(kn)+2023=n$ có đúng 2 nghiệm. Thật vậy, nếu $p\mid n$ thì $n=p^{\alpha}m$ với $\left(m,p\right)=1,\alpha\in\mathbb{Z}^+$.

Ta có: $(\alpha+2)\tau(m)+2023=p^{\alpha}m\Rightarrow m(p^{\alpha}-\alpha-2)<2023$. Vô lý.

Vậy $n$ không chia hết cho $p$. Pt trở thành $2\tau(n)+2023=n$. Suy ra $n$ lẻ và $n\le 4\sqrt{n}+2023\Rightarrow\left(\sqrt{n}-2\right)^2\le 2027\Rightarrow n\le 2211$.

Viết $n=p_1^{\alpha_1}...p_s^{\alpha_s}$ với $3\le p_1<p_1<\cdots<p_s$ là các số nguyên tố, $\alpha_i\in\mathbb{Z}^+$.

Nếu $s\ge 5$ thì $n\ge 3.5.7.11.13>2211$, loại.

Nếu $s=4$ thì do $3^2.5.7.11>2211$ ta phải có $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=1$. Lúc này $\tau(n)=16$ nên $n=2055=3.5.137$, loại.

Nếu $s=3$ thì do $3^4.5.7>2211$ ta phải có $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\le 5$.

- Với $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\left(1,1,3\right)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=16$ nên $n=2055=3.5.137$, loại.
- Với $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\left(1,2,2\right)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=18$ nên $n=2059=29.71$, loại.
- Với $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\left(1,1,2\right)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=12$ nên $n=2047=23.89$, loại.
- Với $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\left(1,1,1\right)$ thì $\tau(n)=8$ nên $n=2039$, loại.

Nếu $s=2$ thì do $3^6.5>2211$ ta phải có $\alpha_1+\alpha_2\le 6$.

- Với $\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\left(1,5\right)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=12$ nên $n=2047=23.89$, loại.
- Với $\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\left(2,4\right)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=15$ nên $n=2053$, loại.
- Với $\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\left(3,3\right)$ thì $\tau(n)=16$ nên $n=2055=3.5.137$, loại.
- Với $\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\left(1,4\right)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=10$ nên $n=2043=3^2.227$, loại.
- Với $\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\left(2,3\right)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=12$ nên $n=2047=23.89$, loại.

- Với $(\alpha_1,\alpha_2)=(1,3)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=8$ nên $n=2039$, loại.
- Với $(\alpha_1,\alpha_2)=(2,2)$ thì $\tau(n)=9$ nên $n=2041=13.157$, loại.
- Với $(\alpha_1,\alpha_2)=(1,2)$ hoặc hoán vị thì $\tau(n)=6$ nên $n=2035=5.11.37$, loại.
- Với $(\alpha_1,\alpha_2)=(1,1)$ thì $\tau(n)=4$ nên $n=2031=3.677$. Thỏa mãn.

Nếu $s=1$ thì do $3^8>2211$ ta phải có $\alpha_1\le 7$.

- Với $\alpha_1=7$ thì $\tau(n)=8$ nên $n=2039$, loại.
- Với $\alpha_1=6$ thì $\tau(n)=7$ nên $n=2037=3.7.97$, loại.
- Với $\alpha_1=5$ thì $\tau(n)=6$ nên $n=2035=5.11.37$, loại.
- Với $\alpha_1=4$ thì $\tau(n)=5$ nên $n=2033=19.107$, loại.
- Với $\alpha_1=3$ thì $\tau(n)=4$ nên $n=2031=3.677$, loại.
- Với $\alpha_1=2$ thì $\tau(n)=3$ nên $n=2029$, loại.
- Với $\alpha_1=1$ thì $\tau(n)=2$ nên $n=2027$. Thỏa mãn.

Vậy có đúng hai số nguyên dương $n$ thỏa mãn phương trình.

**Tổng điểm Câu 6: 7,0 điểm**

7

***Bổ đề:*** Ta có thể gán nhãn cho mỗi mặt của $D$ bởi một trong hai giá trị $+P$ hoặc $-P$, sao cho hai mặt bất kỳ có chung một cạnh luôn được gán nhãn khác nhau.

*Chứng minh bổ đề:* Giả sử $D$ là đa diện gồm các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$. Chọn $O$ là một điểm bên trong $D$. Dựng một hình cầu $S$ tâm $O$ bán kính $R$ nằm bên trong $D$. Nối $OA_k$ cắt mặt cầu $S$ tâm $O$ bán kính $R$ tại $C_k$ $(1\le k\le n)$. Khi đó đa diện $D$ sẽ tương ứng với một "đa diện cong" $E$ với các đỉnh là $C_k$ $(1\le k\le n)$, các "cạnh" tương ứng là các cung cong trên $S$, và các "mặt" tương ứng là các miền trên $S$ được giới hạn bởi các cung cong này. Một phép gán nhãn cho các mặt của $D$ sẽ tương ứng với một phép gán nhãn cho các mặt của $E$ bởi $+P$ hoặc $-P$. Rõ ràng tại mỗi "đỉnh" của $E$ cũng có đúng một số chẵn các "cạnh" chứa đỉnh đó. Khi đó khẳng định của bài toán chuyển về khẳng định có thể gán nhãn cho các "mặt cong" của $E$ bởi hai giá trị $+P$ hoặc $-P$ sao cho hai "mặt" cong bất kỳ có chung một "cạnh" luôn được đánh số khác nhau.

*Định nghĩa*: Ta sẽ gọi một cách gán nhãn cho các mặt của một đa diện cong $G$ trên $S$ là "*Tốt*" nếu hai "mặt" cong bất kỳ có chung một "cạnh" của $G$ luôn được gán nhãn khác nhau.

Chọn một đỉnh $K$ tùy ý của $E$. Ta bắt đầu di chuyển từ đỉnh $K$ này dọc theo các cạnh của $E$. Trong quá trình di chuyển như vậy, khi đi tới một đỉnh kế tiếp, ta sẽ chọn một cạnh tùy ý xuất phát từ đỉnh kế tiếp này, cho đến khi nào chưa quay lại một đỉnh nào đó mà ta đã đi qua khi bắt đầu hành trình từ $K$. Gọi đỉnh đầu tiên quay lại là $A$, tức là $A$ là đỉnh đầu tiên mà hành trình đi từ $K$ đang xét quay trở lại một đỉnh đó. Một đoạn của hành trình này khi đi từ $A$ và quay về chính nó (lần đầu tiên) là một đường cong $T$ khép kín và không tự cắt trên $S$.

Ta tạm thời xóa bỏ các cạnh của $E$ nằm trên $T$ ra khỏi tập các cạnh của $E$ (nhưng giữ lại các đầu mút của các cạnh). Khi đó $E$ trở thành một "đa diện cong" $E'$ mới, trong đó số các cạnh xuất phát tại mỗi đỉnh hoặc giữ nguyên (nếu

$T$ không đi đi qua đỉnh này), hoặc giảm đi 2 (nếu $T$ đi qua đỉnh này). Tiếp tục quá trình trên đối với $E'$, ta lại chọn ra một đường cong $T'$ không tự cắt, khép kín và tạm thời xóa bỏ nó khỏi $E'$.

Quá trình này cứ tiếp tục như vậy đối với mỗi "đa diện" cong mới. Chú ý rằng sau mỗi một bước, các "mặt cong" sẽ dần hợp nhất lại để trở thành một "mặt" mới, và các đỉnh của dãy các "đa diện" cong $E, E', \ldots$ sẽ dần dần không còn là đỉnh của các "đa diện" cong ở các bước tiếp theo, nếu không có cạnh nào nữa đi qua. Vì qua mỗi đỉnh của $E$ có đúng một số chẵn các cạnh chứa đỉnh đó, nên sau một số hữu hạn bước xóa bỏ các đường cong khép kín, quá trình trên sẽ dừng lại và trên mặt cầu $S$ không còn cạnh nào, và như thế cũng không còn đỉnh nào (đỉnh hiểu theo nghĩa phải có ít nhất 1 cạnh đi qua nó).

Giả sử các đường cong khép kín không tự cắt đã bị tạm thời xóa bỏ khỏi $S$ trong quá trình trên lần lượt là $T_m, T_{m-1}, \ldots, T_1$. Như vậy đa diện cong $E$ có thể được khôi phục bằng cách lần lượt đặt trở lại các đường cong $T_1, T_2, \ldots, T_m$ lên mặt $S$. Gọi "đa diện cong" nhận được sau khi đặt $T_1, T_2, \ldots, T_k$ lên là $E_k$ $(1 \le k \le m)$. Rõ ràng mỗi đường cong khép kín không tự cắt $T_k$ chia đa diện cong $E_{k-1}$ thành hai phần không giao nhau là $S_k^+$ và $S_k^-$. Đặt $E_0 = S$.

Ta thực hiện phép gán nhãn các mặt của $E_k$ theo quy nạp như sau.

• **Bước 0:** gán nhãn toàn bộ mặt cầu $S$ bởi duy nhất một trong hai giá trị $+P$ hoặc $-P$, ví dụ bởi $+P$.

• **Bước thứ $k$:** Sau khi đặt trở lại $T_k$ lên $S$, ta đổi nhãn của tất cả các "mặt cong" hoặc phần của các "mặt cong" thuộc $S_k^-$ sang nhãn đối dấu ( $+P$ thành $-P$ và ngược lại), còn giữ nguyên nhãn của các mặt cong thuộc $S_k^+$.

Ta sẽ chứng minh khẳng định sau.

**Khẳng định:** *Tại mỗi bước thứ $k$, phép gán nhãn được thực hiện như trên đối với $E_k$ $(1 \le k \le m)$ là Tốt.*

*Chứng minh*: Ta chứng minh bằng quy nạp theo $k$ $(1 \le k \le m)$.

*Bước cơ sở:* Khẳng định hiển nhiên đúng với $k = 0$, $k = 1$.

*Bước quy nạp:* Giả sử khẳng định đúng tới $k-1$. Ta sẽ chứng minh khẳng định đúng tới $k$.

Thật vậy, gọi $F_k^\pm$ là tập hợp các mặt của $E_k$ nằm trong $S_k^\pm$, tương ứng. Khi đó các mặt thuộc $F_k^\pm$ chia thành hai loại:

- Các mặt được giữ nguyên thừa hưởng từ $E_{k-1}$ (nếu $T_k$ không đi qua các mặt này).
- Các mặt được sinh ra khi $T_k$ đi qua mặt nào đó của $E_{k-1}$ và chia đôi mặt đó. Gọi tập hợp các mặt mới xuất hiện do phép chia nhỏ này là $N_k^\pm$.

Theo giả thiết quy nạp, phép gán nhãn trên $E_{k-1}$ là Tốt. Vì khi đặt $T_k$ trở lại, ta đổi các nhãn trong các mặt thuộc $S_k^-$ sang giá trị đối dấu, nên phép gán nhãn là Tốt *khi xét riêng đối với* $S_k^-$. Rõ ràng, phép gán nhãn *khi xét riêng đối với* $S_k^+$ cũng Tốt, do các nhãn được giữ nguyên ở phần này.

| | | |
|---|---|---|
| | | Ta quan tâm tới các miền thuộc $N_k^-$ và $N_k^+$ có chung nhau một cạnh thuộc $T_k$. Rõ ràng mỗi miền thuộc $N_k^-$ sẽ tương ứng một cách duy nhất với một miền thuộc $N_k^+$ khi $T_k$ chia đôi một miền $M$ nào đó của $E_{k-1}$ : một miền sẽ có nhãn đổi sang trái dấu với nhãn của $M$, một miền được giữ nguyên nhãn của $M$. Vì thế, phép gán nhãn vẫn Tốt khi xét các miền xung quanh $T_k$. Do đó phép gán nhãn là Tốt ở bước thứ $k$ đối với đa diện cong $E_k$. Khẳng định được hoàn toàn chứng minh theo nguyên lý quy nạp.<br>Khi $k = m$, ta nhận được phép gán nhãn Tốt trên toàn bộ đa diện cong $E$, tương ứng với một phép gán nhãn Tốt trên đa diện $D$ ban đầu. |
| | | **Ta trở lại bài toán.**<br>Theo Bổ đề, ta có thể gán nhãn cho mỗi mặt của $D$ bởi một trong hai giá trị $+P$ hoặc $-P$, sao cho hai mặt bất kỳ có chung một cạnh luôn được gán nhãn khác nhau.<br>Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử mặt $F$ được gán giá trị $+P$.<br>Gọi $S_1, S_2, S$ lần lượt là tổng các số được gán với các cạnh của mặt $F$ (được gán giá trị $+P$), tổng các số được gán với các cạnh của tất cả các mặt còn lại được gán giá trị $+P$, tổng các số được gán với các cạnh của tất cả các mặt được gán giá trị $-P$. Ta có: $S_1 + S_2 = S$; $S_2$ và $S$ đều là các số nguyên dương chia hết cho 2024. Suy ra $S_1 = S - S_2$ là số nguyên dương chia hết cho 2024 (ĐPCM).<br>**Chú ý**: học sinh cũng có thể giải bằng cách xét đồ thị G với tập đỉnh là các mặt của đa diện và hai đỉnh của G nối với nhau nếu hai mặt có chung cạnh. Sau khi chứng minh đồ thị G là lưỡng phân do mọi chu trình đều có độ dài chẵn, ta có thể lý luận như phần cuối của lời giải trên. |
| | | **Tổng điểm Câu 7: 7,0 điểm** |
| **Tổng điểm ngày 2: 20 điểm** | | |