

Đề Thi Chọn Học Sinh Giỏi Lớp 12 Tỉnh Ninh Bình 2022-2023

1. Cho dãy số $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi

$$a_0 = 2, a_1 = 4, \quad a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = 12$$

với mọi n nguyên dương.

a) Xác định công thức tổng quát của dãy (a_n) .

b) Tính giới hạn (nếu có) của dãy số $(b_n)_{n \geq 1}$ cho bởi $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$.

2. Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

b) Chứng minh $f(x)$ là đơn ánh và là hàm số lẻ.

c) Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn điều kiện đã cho.

3. Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn qua B, C cắt các cạnh AC, AB tại E, F tương ứng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Gọi M là giao điểm của BE và CF ; S là giao điểm của BC và EF ; D và N lần lượt là giao điểm của AM với BC và (O) ($N \neq A$).

a) Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại P . Chứng minh T, N, P thẳng hàng.

b) Gọi K là giao điểm của AB và CN . Chứng minh K nằm trên đường thẳng SP , từ đó chỉ ra D là trực tâm tam giác OSP .

4. a) Cho p là số nguyên tố khác 3 và số nguyên a sao cho $(a^2 + a + 1) \mid p$. Chứng minh rằng $p \equiv 1 \pmod{3}$.

b) Cho số nguyên dương m lớn hơn 1 sao cho m không có ước nguyên tố dạng $3t + 1$,

$t \in \mathbb{N}$. Tìm tất cả các số nguyên dương a sao cho $1 + am^3$ là lập phương của một số nguyên và $1 + an^3$ không là lập phương của một số nguyên với mọi số nguyên dương $n < m$.

5. Cho một số thực a lớn hơn 1 và một số nguyên dương n .

a) Giả sử n chẵn và $Q(x)$ là một đa thức bậc n có hệ số cao nhất bằng 1 và có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại k nguyên dương sao cho đa thức $P(x) = x^{n+1} + a^k Q(x)$ có $n + 1$ nghiệm thực phân biệt.

b) Chứng minh rằng tồn tại đa thức

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{R}[x]$$

thỏa mãn đồng thời các điều kiện

- $|a_i| = a^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- $P(x)$ có n nghiệm thực phân biệt.
- Nếu n chẵn thì số nghiệm âm và số nghiệm dương của $P(x)$ bằng nhau; nếu n lẻ thì số nghiệm âm và số nghiệm dương của $P(x)$ hơn kém nhau 1 đơn vị.

6. Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm của BC và D là một điểm bất kì trên đoạn AM (D khác A và M). Đường tròn tâm P và Q lần lượt ngoại tiếp các tam giác ABD và ACD . Đường đối trung qua A của tam giác ABC cắt (O) lần thứ hai tại N .

a) Chứng minh hai tam giác OPQ và NBC đồng dạng, từ đó chứng minh OA là đường đối trung của tam giác OPQ .

b) Gọi R là giao điểm của PQ và BC . Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác RBP và RCQ cắt nhau tại T . Chứng minh rằng năm điểm T, A, O, M, N đồng viên.

7. Với mỗi số nguyên dương n , xét tập hợp $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Người ta tô màu cho tất cả các phần tử của S , mỗi phần tử được tô bởi đúng một trong hai màu xanh hoặc đỏ một cách ngẫu nhiên sao cho mỗi màu đều được dùng ít nhất một lần.

a) Tính số cách tô màu thỏa mãn điều kiện trong các số được tô màu xanh, không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp.

b) Tính xác suất của biến cố: "Số lớn nhất trong các số được tô màu xanh lớn hơn số nhỏ nhất trong các số được tô màu đỏ".