

Đề Thi Chọn Học Sinh Giỏi Lớp 12 Tỉnh Quảng Trị 2022-2023

1. a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (3m + 4)x + 2022$$

đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ có n con cá ($n < 12$) thì khối lượng trung bình mỗi con cá sau một vụ thu hoạch bằng $60n - 5n^2$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích mặt hồ để thu được khối lượng cá lớn nhất?

2. a) Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh trong một nhóm gồm 6 nam và 4 nữ để làm trực nhật. Tính xác suất để trong 4 học sinh được chọn có nhiều nhất 3 học sinh nam.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(7) = 16f(1)$. Chứng minh rằng phương trình

$$4f(x - 1) - f(x + 2) = 0$$

có nghiệm trên đoạn $[2; 5]$.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$, tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. a) Chứng minh rằng $SA \perp (SBC)$.
b) Biết góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .

4. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$2(\cos 2A + \cos 2B) + 7 = 4(\cos A + \sqrt{2} \cos B).$$

Tính số đo góc $\angle C$.

5. a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (2x+5)\sqrt{x+1} + (2y-7)\sqrt{2-y} = 0 \\ \sqrt{2y^2+x+2} = y^2 - x^2 + x + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức

$$u_1 = 4, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 - 4u_n + 9), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (u_n) tăng và không bị chặn trên.

b) Đặt $S_n = \frac{1}{u_1-1} + \frac{1}{u_2-1} + \dots + \frac{1}{u_n-1}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

6. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn $6xyz = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

a) Chứng minh rằng

$$\frac{1}{y} + \frac{2}{x} \leq 3.$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 10x + 6y + 2z + \frac{4}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z}.$$

