

ĐẠO HÀM

BÀI GIẢNG QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được quy tắc và các công thức tính đạo hàm.
- + Trình bày được cách tìm đạo hàm thích hợp.
- + Trình bày được cách viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm.

❖ Kỹ năng

- + Tìm được đạo hàm các hàm số thường gặp, đạo hàm hàm số hợp.
- + Viết được phương trình tiếp tuyến và giải quyết các bài toán liên quan.
- + Vận dụng đạo hàm để giải phương trình, bất phương trình,; chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, tính giới hạn.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

$$(c)' = 0, c \text{ là hằng số};$$

$$(x)' = 1;$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \text{ (với } n \text{ là số tự nhiên)}.$$

2. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương.

Cho các hàm số $u = u(x)$; $v = v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

$$1. (u+v)' = u' + v';$$

$$2. (u-v)' = u' - v';$$

$$3. (u \cdot v)' = u'v + v'u;$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} (v = v(x) \neq 0).$$

Chú ý:

$$a) (k \cdot v)' = kv' \text{ (k: hằng số)};$$

$$b) \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{v'}{v^2} (v = v(x) \neq 0).$$

Mở rộng:

$$\bullet (u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm \dots \pm u_n';$$

$$\bullet (u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

3. Đạo hàm của hàm số hợp

Cho hàm số $y = f(u(x)) = f(u)$ với $u = u(x)$.

Khi đó: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

4. Bảng công thức đạo hàm của một số hàm số thường gặp

Đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản	Đạo hàm các hàm hợp $u = u(x)$
----------------------------------	--------------------------------

$(c)' = 0, c \text{ là hằng số}$ $(x)' = 1$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u' \cdot u^{\alpha-1}$
--	---

5. Đạo hàm các hàm số lượng giác

a) Giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$.

Định lý: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Chú ý: Nếu hàm số $u = u(x)$ thỏa mãn điều kiện: $u(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1.$$

b) Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

Định lý:

Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$

Chú ý: Nếu $y = \sin u$ và $u = u(x)$ thì $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

c) Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Định lý:

Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$

Chú ý: Nếu $y = \cos u$ và $u = u(x)$ thì $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

d) Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$

Định lý:

Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Chú ý: Nếu $y = \tan u$ và $u = u(x)$ có đạo hàm trên $K, u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ với mọi $x \in K$.

Khi đó trên K ta có: $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

e) Đạo hàm của hàm số $y = \cot x$

Định lý:

Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Bảng đạo hàm của hàm số lượng giác

$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

Chú ý: Nếu $y = \cot u$ và $u = u(x)$ có đạo hàm trên K , $u(x) \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ với mọi $x \in K$. Khi đó trên K ta có: $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$.

Khi đó, phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ là: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Nguyên tắc chung để lập được phương trình tiếp tuyến là ta phải tìm được hoành độ tiếp điểm x_0

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Các quy tắc và công thức tính đạo hàm

Bài toán 1. Tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số

Phương pháp giải

Áp dụng bảng công thức và quy tắc tính đạo hàm

- Công thức đạo hàm

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \text{ (với } n \text{ là số tự nhiên).}$$

- Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Cho các hàm số $u = u(x); v = v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định.

Ta có:

a) $(u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm \dots \pm u_n'$.

Ví dụ. Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = x^3 - 3x^2 + \frac{2x-1}{x}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = (x^3)' - (3x^2)' + \left(\frac{2x-1}{x}\right)'$

$$= 3x^2 - 6x + \frac{2 \cdot x - (2x-1) \cdot 1}{x^2}.$$

$$= 3x^2 - 6x + \frac{1}{x^2}.$$

$$b) (u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'.$$

$$c) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0).$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm các hàm số

$$a) y = -x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2020x.$$

$$b) y = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 1}$$

Hướng dẫn giải

$$a) y' = (-x^4)' + \left(\frac{3}{2}x^2\right)' + (2020x)' \Rightarrow y' = -4x^3 + 3x + 2020.$$

$$b) y' = \frac{(\sqrt{x} + 2)' \cdot (x + 1) - (\sqrt{x} + 2)(x + 1)'}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x + 1) - (\sqrt{x} + 2)}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{x + 1 - 2x - 4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x + 1)^2}$$

$$= \frac{1 - x - 4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x + 1)^2}.$$

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm các hàm số

$$a) y = x(2x - 1)(3x + 2).$$

$$b) y = x^2 + x\sqrt{x} - 5.$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y = x(2x - 1)(3x + 2) = (2x^2 - x)(3x + 2)$. Khi đó

$$y' = [(2x^2 - x)(3x + 2)]'$$

$$= (2x^2 - x)' \cdot (3x + 2) + (3x + 2)' \cdot (2x^2 - x)$$

$$= (4x - 1)(3x + 2) + 3(2x^2 - x)$$

$$= 18x^2 + 2x - 2.$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
 y' &= (x^2)' + (x\sqrt{x})' - 5' \\
 &= 2x + x' \cdot \sqrt{x} + (\sqrt{x})' \cdot x \\
 &= 2x + \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x \\
 &= 2x + \frac{3\sqrt{x}}{2}.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Chứng minh các công thức tổng quát sau

$$a) \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}; \quad (a, b, c, d \text{ là hằng số})$$

$$b) \left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} \quad (a, b, c, a_1, b_1, c_1 \text{ là hằng số})$$

$$c) \left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1} \right)' = \frac{a \cdot a_1 x^2 + 2a \cdot b_1 x + \begin{vmatrix} b & c \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x+b_1)^2} \quad (a, b, c, a_1, b_1 \text{ là hằng số})$$

Hướng dẫn giải

a) Ta có

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' &= \frac{(ax+b)'(cx+d) - (ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2} \\
 &= \frac{a(cx+d) - (ax+b)c}{(cx+d)^2} \\
 &= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

b) Ta có

$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1} \right)' = \frac{(ax^2+bx+c)'(a_1x^2+b_1x+c_1) - (ax^2+bx+c)(a_1x^2+b_1x+c_1)'}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$$

$$= \frac{(2ax+b) \cdot (a_1x^2+b_1x+c_1) - (ax^2+bx+c) \cdot (2a_1x+b_1)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$$

$$= \frac{(a \cdot b_1 - a_1 \cdot b)x^2 - 2(a \cdot c_1 - a_1 \cdot c)x + (b \cdot c_1 - b_1 \cdot c)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$$

Vậy $\left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$ (điều phải chứng minh).

c) Ta có $\left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1} \right)' = \frac{(ax^2+bx+c)' \cdot (a_1x+b_1) - (ax^2+bx+c) \cdot (a_1x+b_1)'}{(a_1x+b_1)^2}$

$$= \frac{(2ax+b) \cdot (a_1x+b_1) - (ax^2+bx+c) \cdot a_1}{(a_1x+b_1)^2}$$

$$= \frac{a \cdot a_1 x^2 + 2a \cdot b_1 x + (b \cdot b_1 - a_1 \cdot c)}{(a_1x+b_1)^2} \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Vậy $\left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1} \right)' = \frac{a \cdot a_1 x^2 + 2a \cdot b_1 x + \begin{vmatrix} b & c \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x+b_1)^2}$

Bài toán 2. Tìm đạo hàm của hàm số hợp

Phương pháp giải

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Công thức đạo hàm của một số hàm hợp thường gặp:

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}};$$

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

trong đó $u = u(x)$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = (x^4 + 2x)^2 + \sqrt{2x^2 - 1}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \left[(x^4 + 2x)^2 \right]' + \left(\sqrt{2x^2 - 1} \right)'$

$$y' = 2(x^4 + 2x) \cdot (x^4 + 2x)' + \frac{(2x^2 - 1)'}{2\sqrt{2x^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow y' = 2(x^4 + 2x) \cdot (4x^3 + 2) + \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow y' = 4x(x^3 + 2) \cdot (2x^3 + 1) + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - 1}}.$$

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^3$;

b) $y = \sqrt{3x^2 - 2x + 1}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có:

$$y' = 3 \cdot \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^2 \cdot \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)' = 3 \cdot \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^2 \cdot \frac{-3}{(x-1)^2} = -\frac{9(2x+1)^2}{(x-1)^4}$$

b) Ta có: $y' = \frac{(3x^2 - 2x + 1)'}{2\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} = \frac{6x - 2}{2\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} = \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}$.

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right)^2$;

b) $y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $y' = 2 \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right)'$

$$= 2 \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) \frac{-2}{(1+\sqrt{x})^2} (\sqrt{x})'$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x}} \frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^3}$$

b) Ta có: $y' = \left[\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \right]' = 2 \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)'$

$$= 2 \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Ví dụ 3: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} + 2x - 1}$

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$y' = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 2}{2\sqrt{\sqrt{x^2+1} + 2x - 1}} = \frac{x + 2\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1} + 2x - 1)}}$$

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = ax + b$, với a, b là hai số thực đã cho. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f'(x) = a$. B. $f'(x) = -a$. C. $f'(x) = b$. D. $f'(x) = -b$.

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 5x - 1$ tại $x = 4$ là

- A. -1 . B. -5 . C. 2 . D. 3 .

Câu 3: Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đạo hàm là

- A. $y' = 2$. B. $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$. C. $y' = -\frac{3}{(x-1)^2}$. D. $y' = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Câu 4: Cho các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng J và $v(x) \neq 0$ với $\forall x \in J$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$. B. $\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = \frac{v'(x)}{v^2(x)}$.
C. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$. D. $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$.

Câu 5: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{1}{x} + 8$

- A. $y' = 2x^3 + 2x^2 - \frac{1}{x^2} + 1$ B. $y' = 2x^3 + 2x^2 - \frac{1}{x^2}$.
C. $y' = 2x^3 + 2x^2 - 1$ D. $y' = 2x^3 + 2x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x - 2}$. Đạo hàm của hàm số tại $x = 1$ là

- A. $y'(1) = -4$. B. $y'(1) = -5$. C. $y'(1) = -3$. D. $y'(1) = -2$.

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y = (1 - x^3)^5$ là

- A. $y' = 5(1 - x^3)^4$. B. $y' = -15x^2(1 - x^3)^4$.
C. $y' = -3(1 - x^3)^4$. D. $y' = -5x^2(1 - x^3)^4$.

Câu 8: Hàm số $y = \frac{(x-2)^2}{1-x}$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2}$.

B. $y' = \frac{x^2 - 2x}{(1-x)^2}$

C. $y' = -2(x-2)$.

D. $y' = \frac{x^2 + 2x}{(1-x)^2}$

Câu 9: Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^2(2x+1)(5x-3)$.

A. $y' = 40x^2 - 3x^2 - 6x$.

B. $y' = 40x^3 - 3x^2 - 6x$.

C. $y' = 40x^3 + 3x^2 - 6x$.

D. $y' = 40x^3 - 3x^2 - x$.

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{x} + 2\sqrt{x}$ là

A. $y' = 3x^5 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

B. $y' = 6x^5 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

C. $y' = 3x^5 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

D. $y' = 6x^5 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Câu 11: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \left(4x + \frac{5}{x^2}\right)^3$.

A. $y' = 3\left(4 + \frac{10}{x^3}\right)\left(4x + \frac{5}{x^2}\right)^2$.

B. $y' = 3\left(4 - \frac{10}{x^3}\right)\left(4x - \frac{5}{x^2}\right)^2$.

C. $y' = \left(4x + \frac{5}{x^2}\right)^2$.

D. $y' = 3\left(4 - \frac{10}{x^3}\right)\left(4x + \frac{5}{x^2}\right)^2$.

Câu 12: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2-3x^2}$ là

A. $\frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

B. $\frac{1}{2\sqrt{2-3x^2}}$.

C. $\frac{-6x^2}{2\sqrt{2-3x^2}}$.

D. $\frac{3x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Giá trị $y'(0)$ bằng

A. $y'(0) = \frac{1}{2}$.

B. $y'(0) = \frac{1}{3}$.

C. $y'(0) = 1$.

D. $y'(0) = 2$.

Câu 14: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ có dạng $\frac{ax}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Khi đó a nhận giá trị nào sau đây?

A. $a = -4$.

B. $a = -1$.

C. $a = 2$.

D. $a = -3$.

Câu 15: Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^2 + x\sqrt{x+1}$.

A. $y' = 2x + \sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$

B. $y' = 2x - \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$

C. $y' = \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$

D. $y' = 2x + \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$

Câu 16: Tính đạo hàm của hàm số sau $y = (x+2)^3(x+3)^2$.

- A. $y' = 3(x^2 + 5x + 6)^3 + 2(x+3)(x+2)^3$. B. $y' = 2(x^2 + 5x + 6)^2 + 3(x+3)(x+2)^3$
C. $y' = 3(x^2 + 5x + 6) + 2(x+3)(x+2)$. D. $y' = 3(x^2 + 5x + 6)^2 + 2(x+3)(x+2)^3$

Câu 17: Đạo hàm của hàm số $y = (-x^2 + 3x + 7)^7$ là

- A. $y' = 7(-2x+3)(-x^2 + 3x + 7)^6$ B. $y' = 7(-x^2 + 3x + 7)^6$
C. $y' = (-2x+3)(-x^2 + 3x + 7)^6$ D. $y' = 7(-2x+3)(-x^2 + 3x + 7)^6$

Câu 18: Cho $f(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}$. Giá trị của $f'(0)$ bằng

- A. $\frac{5}{6}$. B. $-\frac{5}{6}$. C. 0. D. 1.

Câu 19: Đạo hàm của hàm số $y = x^2\sqrt{x}$ là

- A. $\frac{x\sqrt{x}}{2}$. B. $\frac{5\sqrt{x}}{2}$. C. $\frac{5x\sqrt{x}}{3}$. D. $\frac{5x\sqrt{x}}{2}$.

Câu 20: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có dạng $\frac{ax^2 + bx}{(x-1)^2}$. Khi đó $a.b$ bằng

- A. $a.b = -2$. B. $a.b = -1$. C. $a.b = 3$. D. $a.b = 4$.

Câu 21: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{(x-1)(x+3)}$ bằng

- A. $\frac{1}{(x+3)^2(x-1)^2}$. B. $\frac{1}{2x+2}$. C. $-\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$. D. $\frac{-4}{(x^2+2x-3)^2}$

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = (2018+x)(2017+2x)(2016+3x)\dots(1+2018x)$. Giá trị của $f'(1)$ bằng

- A. 2019.2018^{1009} B. 2018.1009^{2019} C. 1009.2019^{2018} D. 2018.2019^{1009}

Câu 23: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

- A. $y' = -\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$. B. $y' = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$. C. $y' = \frac{2a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$. D. $y' = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$.

Câu 24: Đạo hàm của hàm số $y = (x+1)\sqrt{x^2 + x + 1}$ là

- A. $\frac{4x^2 - 5x + 3}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$. B. $\frac{4x^2 + 5x - 3}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$. C. $\frac{4x^2 + 5x + 3}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$. D. $\frac{4x^2 + 5x + 3}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Câu 25: Cho $\left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)' = \frac{ax-b}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}, \forall x > \frac{1}{4}$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

- A. -16. B. -4. C. -1. D. 4.

Câu 26: Cho $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $f'(0)$.

- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = n$ C. $f'(0) = n!$ D. $f'(0) = \frac{n(n+1)}{2}$

Câu 27: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2g(x) + 36x = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Giá trị của } A = 3f(2) + 4f'(2) \text{ bằng}$$

- A. 11. B. 14. C. 13. D. 10.

Câu 28: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(1) = 3; g'(1) = 5$. Tính đạo hàm của hàm số hợp $f(g(x))$ tại $x = 1$.

- A. 0. B. 9. C. 15. D. 30.

Câu 29: Biết hàm số $f(x) - f(2x)$ có đạo hàm bằng 5 tại $x = 1$ và đạo hàm bằng 7 tại $x = 2$. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) - f(4x)$ tại $x = 1$.

- A. 8. B. 12. C. 16. D. 19.

Dạng 2: Đạo hàm của hàm số lượng giác

Phương pháp giải

Áp dụng bảng công thức đạo hàm của hàm số lượng giác

$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm của hàm số

- a) $y = \sin 2x + \cos 5x$.
b) $y = \sin x \cdot \cos 4x$.
c) $y = \cos^6 x + 2 \sin^4 x \cdot \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cdot \cos^4 x + \sin^4 x$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $y' = (\sin 2x)' + (\cos 5x)' = 2 \cos 2x - 5 \sin 5x$.

b) Ta có: $y' = (\sin x)' \cdot \cos 4x + \sin x \cdot (\cos 4x)'$

$$= \cos x \cdot \cos 4x - 4 \sin x \cdot \sin 4x$$

c) Ta có:

Ví dụ: Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = \sin 2x - \cos \frac{x}{2} + \tan 2020x$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\begin{aligned} y' &= (\sin 2x)' - \left(\cos \frac{x}{2} \right)' + (\tan 2020x)' \\ &= 2 \cdot \cos 2x + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{2020}{\cos^2 2020x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \sin^4 x (1 + 2 \cos^2 x) + \cos^4 x (3 \sin^2 x + \cos^2 x) \\
&= \sin^4 x (1 + 2 \cos^2 x) + \cos^4 x (1 + 2 \sin^2 x) \\
&= \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^4 x \cos^2 x + 2 \sin^2 x \cos^4 x \\
&= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Vậy $y' = l' = 0$.

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số

a) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$ tại $x = \frac{\pi}{3}$.

b) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$ tại $x = \frac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y' = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(0) + 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

b) Ta có $y' = -3 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 \sin \frac{5\pi}{6} + 2 \cos 0 = \frac{1}{2}.$$

Chú ý: Không thay giá trị của biến x trước khi tìm đạo hàm.

Ví dụ 3: Tìm đạo hàm của hàm số

a) $y = \tan(2x + 1)$;

b) $y = \cot(3x^2 - 5)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $y' = (\tan 2x + 1)' = \frac{2}{\cos^2(2x + 1)}$.

b) Ta có: $y' = [\cot(3x^2 - 5)]' = -\frac{6x}{\sin^2(3x^2 - 5)}$.

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = \frac{(\tan x + \cot x)'}{2\sqrt{\tan x + \cot x}}$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}}{2\sqrt{\tan x + \cot x}}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{2 \sin^2 x \cos^2 x \sqrt{\tan x + \cot x}}$$

$$= \frac{-2 \cos 2x}{\sin^2 2x \sqrt{\tan x + \cot x}}.$$

$$\text{Suy ra } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2 \cos \frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4}}} = 0.$$

Ví dụ 5: Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} \quad \text{với } x \in (0; \pi).$$

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{x}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{4}} \\ &= \sqrt{\cos^2 \frac{x}{8}} = \cos \frac{x}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } y' = \left(\cos \frac{x}{8} \right)' = -\frac{1}{8} \sin \frac{x}{8}.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$

Chứng minh rằng: $y'(\sin x - x \cos x)^2 - x^2 y^2 = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$y' = \frac{(\sin x - x \cos x)'(\cos x + x \sin x) - (\sin x - x \cos x)(\cos x + x \sin x)'}{(\cos x + x \sin x)^2}$$

Ta có:

$$+) (\sin x - x \cos x)' = \cos x - x' \cos x - x.(\cos x)' = x \sin x;$$

$$+) (\cos x + x \sin x)' = -\sin x + x' \sin x + x.(\sin x)' = x \cos x$$

$$\text{Do đó: } y' = \frac{x \sin x.(\cos x + x \sin x) - (\sin x - x \cos x)x \cos x}{(\cos x + x \sin x)^2} = \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}$$

$$\text{Ta có: } VT = y'(\sin x - x \cos x)^2 - x^2 y^2$$

$$= \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2} \cdot (\sin x - x \cos x)^2 - x^2 \cdot \left(\frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x} \right)^2 = 0 = VP.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y = 5 \sin x - 3 \cos x$.

- A. $y' = 5 \cos x + 3 \sin x$. B. $y' = \cos x + 3 \sin x$.
C. $y' = \cos x + \sin x$. D. $y' = 5 \cos x - 3 \sin x$.

Câu 2: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{3x + 2 \tan x}$.

- A. $y' = \frac{5 + 2 \tan^2 x}{2\sqrt{3x + 2 \tan x}}$. B. $y' = \frac{5 - 2 \tan^2 x}{2\sqrt{3x + 2 \tan x}}$
C. $y' = \frac{-5 + 2 \tan^2 x}{2\sqrt{3x + 2 \tan x}}$ D. $y' = \frac{-5 - 2 \tan^2 x}{2\sqrt{3x + 2 \tan x}}$

Câu 3: Cho hàm số $y = \cos 3x \cdot \sin 2x$. Giá trị của $y' \left(\frac{\pi}{3} \right)$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. -1 . D. 1 .

Câu 4: Hàm số $y = x^2 \cos x$ có đạo hàm là

- A. $y' = 2x \cos x - x^2 \sin x$. B. $y' = 2x \cos x + x^2 \sin x$.
C. $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$. D. $y' = 2x \sin x - x^2 \cos x$.

Câu 5: Đạo hàm của hàm số $y = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$ là

- A. $\cos x \cos(\cos x) + \sin x \sin(\sin x)$. B. $-\left[\sin x \cos(\cos x) + \cos x \sin x(\sin x) \right]$
C. $-\left[\cos x \cos(\cos x) + \sin x \sin(\sin x) \right]$. D. $\sin x \cos(\cos x) + \cos x \sin x(\sin x)$

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ là

- A. $\sin 4x$. B. $2 - \sin 4x$.
C. $\cos 4x - \sin 4x$. D. $-\sin 4x$.

Câu 7: Biết hàm số $y = 5 \sin 2x - 4 \cos 5x$ có đạo hàm là $y' = a \sin 5x + b \cos 2x$. Giá trị của $a - b$ bằng

- A. -30 . B. 10 . C. -1 . D. -9 .

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{\cos(\pi x)}$. Giá trị của $f'(3)$ bằng

- A. 2π . B. $\frac{8\pi}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. D. 0 .

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$. Giá trị $f' \left(\frac{\pi^2}{16} \right)$ bằng

- A. 0 . B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Câu 10: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 x \cdot \cos x$.

A. $y' = \sin x(3\cos^2 x - 1)$.

B. $y' = \sin x(3\cos^2 x + 1)$.

C. $y' = \sin x(\cos^2 x + 1)$.

D. $y' = \sin x(\cos^2 x - 1)$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = a \cos x + 2 \sin x - 3x + 2020$. Tìm a để phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm

A. $|a| < \sqrt{5}$.

B. $|a| \geq \sqrt{5}$.

C. $|a| > 5$.

D. $|a| < 5$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi biểu thức $y' = \cos x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $y = 1 + \sin x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = 1 - \cos x$.

D. $y = \sin x$.

Câu 13: Hàm số $y = 2\sqrt{\sin x} - 2\sqrt{\cos x}$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

B. $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

C. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

D. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

Câu 14: Cho $f(x) = \sin^3 ax$, $a > 0$. Tính $f'(\pi)$.

A. $f'(\pi) = 3\sin^2(a\pi) \cdot \cos(a\pi)$.

B. $f'(\pi) = 0$.

C. $f'(\pi) = 3a \sin^2(a\pi)$.

D. $f'(\pi) = 3a \cdot \sin^2(a\pi) \cdot \cos(a\pi)$.

Câu 15: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}$.

A. $y' = \frac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}$.

B. $y' = \frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}$.

C. $y' = \frac{-1}{(\sin x + \cos x)^2}$.

D. $y' = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{\cos 2x}{1 - \sin x}$. Giá trị của $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng

A. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$.

B. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$.

C. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

D. $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

Câu 17: Đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$$
 là

A. 6.

B. $2 \sin 2x$.

C. 0.

D. $2 \cos 2x$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \sin(\pi \sin x)$. Giá trị của $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng

A. $-\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

C. 0.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 19: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2(\cos(\tan^4 3x))$.

A. $y' = \sin(2\cos(\tan^4 3x)) \cdot (\sin(\tan^4 3x)) \cdot 4\tan^3 3x \cdot (1 + \tan^3 3x) \cdot 3$.

B. $y' = \sin(2\cos(\tan^4 3x)) \cdot (\sin(\tan^4 3x)) \cdot \tan^3 3x \cdot (1 + \tan^3 3x)$

C. $y' = \sin(2\cos(\tan^4 3x)) \cdot (\sin(\tan^4 3x)) \cdot 4\tan^3 3x \cdot (1 + \tan^3 3x)$

D. $y' = -\sin(2\cos(\tan^4 3x)) \cdot (\sin(\tan^4 3x)) \cdot 4\tan^3 3x \cdot (1 + \tan^3 3x) \cdot 3$

Câu 20: Hàm số $y = \sqrt{\cot 2x}$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{1 + \cot^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$. B. $y' = \frac{-(1 + \cot^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$. C. $y' = \frac{1 + \tan^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$. D. $y' = \frac{-(1 + \tan^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$

Câu 21: Hàm số $y = \tan x - \cot x$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{1}{\sin^2 2x}$. B. $y' = \frac{4}{\cos^2 2x}$. C. $y' = \frac{4}{\sin^2 2x}$. D. $y' = \frac{1}{\cos^2 2x}$.

Câu 22: Hàm số $y = \tan^2 \frac{x}{2}$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{\tan \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}$. B. $y' = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}$. C. $y' = \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cos^3 \frac{x}{2}}$. D. $y' = \tan^3 \frac{x}{2}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $y' = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$. B. $y' = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$.
C. $y' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$. D. $y' = \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$.

Câu 24: Tính đạo hàm $y = \sqrt{\cos 6x}$.

A. $y' = \frac{3 \sin 6x}{2\sqrt{\cos 6x}}$. B. $y' = \frac{-3 \sin 6x}{\sqrt{\cos 6x}}$. C. $y' = \frac{3 \sin 6x}{\sqrt{\cos 6x}}$. D. $y' = \frac{-3 \sin 6x}{\sqrt{\cos 6x}}$

Câu 25: Đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$ là

A. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. B. $\frac{2}{3}$.
C. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. D. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Câu 26: Cho hàm $f(x)$ thỏa mãn $f(\sin x + 1) + f(\cos x) = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Giá trị của $f'(1)$ là

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. 2. D. 1.

Câu 27: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \cos(\tan^2 x)$.

A. $y' = 2 \tan x \cdot (\tan^2 x + 1) \cdot \sin(\tan^2 x)$.

B. $y' = 2 \tan x \cdot \sin(\tan^2 x)$

C. $y' = -2 \tan x \cdot (\tan^2 x + 1) \cdot \sin(\tan^2 x)$

D. $y' = 2(\tan^2 x + 1) \cdot \sin(\tan^2 x)$

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}$ là

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}}$.

B. $y' = \frac{1 + \tan^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}}$

C. $y' = \frac{1 + \tan^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

D. $y' = \frac{1 + \tan^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức đạo hàm, tìm giới hạn, giải phương trình và bất phương trình chứa đạo hàm.

Phương pháp giải

Sử dụng công thức và quy tắc tính đạo hàm

Áp dụng kiến thức phương trình, bất phương trình để giải quyết bài toán.

- Để tính $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{x - x_0}$ biết $g(x_0) = 0$.

Ta viết $g(x) = f(x) - f(x_0)$. Khi đó nếu

$f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

- Để tính $B = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{G(x)}$, biết

$$F(x_0) = G(x_0) = 0.$$

Ta viết: $F(x) = f(x) - f(x_0)$ và

$$G(x) = g(x) - g(x_0).$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = -3x^3 + 25x - 20$.

Giải phương trình $y' = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -9x^2 + 25$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -9x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{5}{3}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{5}{3}$

và $x = -\frac{5}{3}$

Ví dụ 2. Tính $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 1}{x}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} \text{ và}$$

$$f(0) = 1.$$

Nếu hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm tại

$x = x_0$ và $g'(x_0) \neq 0$ thì:

$$\text{Suy ra } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -\frac{1}{3}.$$

$$B = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$. Chứng minh rằng $2\sqrt{1 + x^2} \cdot y' = y$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}} \cdot (x + \sqrt{1 + x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{1 + x^2} + x}}{2\sqrt{1 + x^2}} = \frac{y}{2\sqrt{1 + x^2}} \Rightarrow 2\sqrt{1 + x^2} \cdot y' = y. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Giải bất phương trình $f'(x) \leq f(x)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}. \text{ Khi đó } f'(x) \leq f(x) \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \leq \sqrt{x^2-2x} \quad (1)$$

Điều kiện xác định: $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

$$(1) \Rightarrow x-1 \leq x^2-2x \Leftrightarrow x^2-3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện trên suy ra $x < 0$ hoặc $x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (m+2)x - 7$. Tìm giá trị của tham số m để $f'(x) \geq 0$ với mọi

$x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } f'(x) = x^2 - 2mx + m + 2$$

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = m^2 - (m+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$$

Vậy $-1 \leq m \leq 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Giải phương trình $f'(x) = 0$ trong các trường hợp sau

a) $f(x) = \sin 3x - 3 \sin x + 7$;

b) $f(x) = \cos 2x + 2 \sin x - 1$.

Hướng dẫn giải

a) $f(x) = \sin 3x - 3 \sin x + 7 \Rightarrow f'(x) = 3 \cos 3x - 3 \cos x$. Khi đó:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \cos 3x - 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + k2\pi \\ 3x = -x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

b) $f(x) = \cos 2x + 2 \sin x - 1 \Rightarrow f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \cos x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin 2x + 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (-2 \sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 5: Tính giới hạn sau: $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt[3]{1+3x^2}}{1 - \cos x}$

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt[3]{1+3x^2}}{x^2}}{\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}}$$

Mà
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Đặt $t = x^2$, sử dụng phương pháp liên hợp ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2t} - \sqrt[3]{1+3t}}{t} = 0.$$

Vậy $A = 0$.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho hàm số $y = \sqrt[3]{1-x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $3y'y^2 + 1 = 0$. B. $y'y^2 + 1 = 0$ C. $3y'y^2 - 1 = 0$ D. $y'y^2 - 1 = 0$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

- A. $\left\{0; \frac{2}{3}\right\}$. B. $\left\{0; -\frac{2}{3}\right\}$. C. $\left\{0; \frac{3}{2}\right\}$. D. $\left\{0; -\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $y\sqrt{1+x^2} - y' = 0$. B. $y'\sqrt{1+x^2} - y = 0$. C. $y\sqrt{1+x^2} + y' = 0$. D. $y'\sqrt{1+x^2} + y = 0$.

Câu 4: Cho $f(x) = (m-1)x^3 + 2(m-1)x^2 + mx$. Tập hợp các giá trị của m để $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $(1; 4]$. B. $(1; 4)$. C. $[1; 4]$. D. $[1; 4)$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = k\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} (k \in \mathbb{R})$. Giá trị của k để $f'(1) = \frac{3}{2}$ là

- A. $k = 1$. B. $k = -3$. C. $k = 3$. D. $k = \frac{9}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$. Phương trình $y' = 0$ có tập nghiệm là

- A. $\{-1; 2\}$. B. $\{-1; 3\}$. C. $\{0; 4\}$. D. $\{1; 2\}$

Câu 7: Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Khi đó $y.y'$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $2 - 2x$. C. $1 - x$. D. $\frac{2x - x^2}{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 1$. Để $f'(x) = 0$ thì x có giá trị thuộc tập hợp

- A. $\{-3; 2\}$. B. $\{3; -2\}$. C. $\{-6; 4\}$. D. $\{4; -6\}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 3$. Để $f'(x) \leq 0$ thì x có giá trị thuộc tập hợp

A. $\left[-\frac{7}{3}; 1\right]$.

B. $\left[-1; \frac{7}{3}\right]$

C. $\left(-\frac{7}{3}; 1\right)$

D. $\left\{-\frac{7}{3}; 1\right\}$

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + x - 7}{x^2 + 3}$. Tập nghiệm của phương trình $y' = 0$ là

A. $\{-1; 3\}$.

B. $\{1; 3\}$.

C. $\{-3; 1\}$.

D. $\{-3; -1\}$

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$. Tất cả các nghiệm của phương trình $y' = 0$ là

A. $x = 0$.

B. $x = 2$.

C. $x = -2$.

D. $x = 0; x = -2$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ nhận giá trị âm khi x thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1] \cup [1; +\infty)$.

D. $[-1; 1]$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - x + 5$. Với giá trị nào của x thì âm?

A. $-1 < x < \frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{3} < x < 1$.

C. $-\frac{1}{3} < x < 1$.

D. $-\frac{2}{3} < x < 2$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = 2\cos^2(4x + 1) + 2\pi - 2020$. Giá trị nhỏ nhất của $f'(x)$ là bao nhiêu?

A. $\min f'(x) = -8$.

B. $\min f'(x) = 8$

C. $\min f'(x) = 4$

D. $\min f'(x) = -4$

Câu 15: Cho hàm số $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x - 2x + 2019$. Số nghiệm của phương trình $y' = 0$ trên đoạn $[0; 2020\pi]$ là

A. 2019.

B. 2020.

C. 1011.

D. 1010.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$. Hỏi có bao nhiêu điểm phân biệt trên đường tròn lượng giác biểu diễn các nghiệm của phương trình $3f(x) + 2f'(x) = 5$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 17: Cho $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x$. Tìm x sao cho $f'(x) < 0$.

A. $x > \frac{4}{3}$ hoặc $x < -1$.

B. $-1 < x < \frac{4}{3}$.

C. $x \geq \frac{4}{3}$ hoặc $x \leq -1$.

D. $-1 \leq x \leq \frac{4}{3}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1$. Để $f'(x) = 0$ thì x có giá trị bằng

A. $-2\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. 2.

D. Không tồn tại.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + (3-m)x - 2$. Tìm m để $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $0 \leq m \leq \frac{12}{5}$.

B. $0 < m < \frac{12}{5}$

C. $0 \leq m < \frac{12}{5}$

D. $0 < m \leq \frac{12}{5}$

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3mx^2 - 12x + 3$ với m là tham số thực, số giá trị nguyên của m để $f'(x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. 1. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 21: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+2018x)-1}{x}$ bằng

- A. 2018.2019. B. 2019. C. 2018. D. 1009.2019.

Câu 22: Cho $f(x) = 2x^3 + 3(a+2)x^2 + 6a^2x$. Biết $f'(x) > 0$ luôn đúng với mọi x và $f'(-1) = 6$. Tìm a

- A. $a = -1$. B. $a = 2$. C. $a = 1$. D. $a = 3$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = g(x)$ với $g(x) = f(4-x^3)$. Biết rằng tập các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là $(-4; 3)$. Tập các giá trị của x để $g'(x) > 0$ là

- A. $(1; 2)$. B. $(8; +\infty)$. C. $(-\infty; 8)$. D. $(1; 8)$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{ khi } 0 < x < x_0 \\ x^2 + 12 & \text{ khi } x \geq x_0 \end{cases}$. Biết rằng ta luôn tìm được một số dương x_0 và một số

thực a để hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; x_0) \cup (x_0; +\infty)$. Tính giá trị $S = x_0 + a$.

- A. $S = 2(3 - 2\sqrt{2})$. B. $S = 2(1 + 4\sqrt{2})$. C. $S = 2(3 - 4\sqrt{2})$ D. $S = 2(3 + 2\sqrt{2})$

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$.

- A. 0. B. $f'(2)$. C. $2f'(2) - f(2)$. D. $f(2) - 2f'(2)$

Câu 26: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+3x} - 1}{x}$ bằng

- A. $\frac{n}{3}$. B. $\frac{3}{n}$. C. $\frac{1}{n}$. D. $\sqrt[n]{3}$.

Dạng 4: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Bài toán 1. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tiếp điểm

Phương pháp giải

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị

$(C): y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, y_0)$.

Bước 1: Tìm đạo hàm $y' = f'(x)$, từ đó suy ra

hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.

Bước 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại

điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Ví dụ. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị

$(C): y = x^3 + 2x^2$ tại điểm $M(1; 3)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 + 4x \Rightarrow k = y'(1) = 7$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(1; 3)$ là

$$d: y = y'_0(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = 7(x - 1) + 3$$

Chú ý:

$$\Leftrightarrow y = 7x - 4.$$

+) Nếu đề bài cho hoành độ tiếp điểm x_0 thì tìm y_0 bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức là: $y_0 = f(x_0)$.

+) Nếu đề bài cho tung độ tiếp điểm y_0 thì tìm x_0 bằng cách giải phương trình $f(x_0) = y_0$.

+) Viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm của đồ thị $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = ax + b$. Khi đó các hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C) .

Đặc biệt:

Trục hoành $Ox: y = 0$ và trục tung

$Oy: x = 0$

Sử dụng máy tính cầm tay

Phương trình tiếp tuyến cần lập có dạng

$$d: y = kx + m$$

+ Đầu tiên tìm hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0)$.

Bấm Shift $\left(\frac{d}{dx}\right)$ và nhập $f(x); x = x_0$, sau đó

bấm $=$ ta được k .

+ Tiếp theo: Bấm phím $\left(\frac{d}{dx}\right)$ để sửa lại thành

$$\frac{d}{dx}(f(X)) \Big|_{X=x_0} \times (-X) + f(X), \text{ sau đó bấm phím}$$

CALC với $X = x_0$ và bấm phím $=$ ta được m .

$$\frac{d}{dx}(X^3 + 2X^2) \Big|_{x=1} = 7$$

$$\frac{d}{dx}(X^3 + 2X^2) \Big|_{x=1} = -4$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là:

$$y = 7x - 4.$$

🌈 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho điểm M thuộc đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ và có hoành độ bằng -1 . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M .

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Cách 1. Ta có: $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = y(-1) = \frac{1}{2}$ và $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow k = y'(-1) = \frac{-3}{4}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -\frac{3}{4}(x+1) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$.

Cách 2. Sử dụng máy tính cầm tay

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là: $y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$.

Ví dụ 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-5}$ tại giao điểm với trục hoành

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Tọa độ giao điểm với trục hoành $y = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-5} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = -\frac{1}{2}$ là

$$y = y' \left(-\frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right) + y \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{4}{11} \left(x + \frac{1}{2} \right) = -\frac{4}{11}x - \frac{2}{11}.$$

Ví dụ 3: Gọi $M(x_M; y_M)$ là một điểm thuộc $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$, biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm $N(x_N; y_N)$ (khác M). Tìm giá trị nhỏ nhất $P = 5x_M^2 + x_N^2$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$.

Gọi $M(x_M; y_M)$ là một điểm thuộc $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$, suy ra tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình

$$y = (3x_M^2 - 6x_M)(x - x_M) + x_M^3 - 3x_M^2 + 2.$$

Tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm $N(x_N; y_N)$ (khác M) nên x_M, x_N là nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = (3x_M^2 - 6x_M)(x - x_M) + x_M^3 - 3x_M^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - x_M^3) - 3(x^2 - x_M^2) - (3x_M^2 - 6x_M)(x - x_M) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_M)^2 (x + 2x_M - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_M \\ x = -2x_M + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_N = -2x_M + 3.$$

$$\text{Khi đó } P = 5x_M^2 + x_N^2 = 5x_M^2 + (-2x_M + 3)^2 = 9x_M^2 - 12x_M + 9 \geq 9\left(x_M - \frac{2}{3}\right)^2 + 5$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 khi $x_M = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1; -2)$ lần lượt cắt hai

trục tọa độ tại A và B. Tính diện tích tam giác OAB.

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-3}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(1) = -3.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; -2)$ là đường thẳng (Δ) có dạng:

$$y = y'(1)(x-1) + y(1) = -3(x-1) - 2 \Leftrightarrow y = -3x + 1$$

$$\text{Suy ra } (\Delta) \cap Ox = A\left(\frac{1}{3}; 0\right); (\Delta) \cap Oy = B(0; 1) \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Bài toán 2. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc

 **Phương pháp giải**

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C).

Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) với hệ số góc k cho trước.

Cách 1.

Bước 1: Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và tính

$$y' = f'(x).$$

Bước 2:

- Hệ số góc tiếp tuyến là $k = f'(x_0)$.

- Giải phương trình này tìm được x_0 , thay vào hàm số được y_0 .

Bước 3: Với mỗi tiếp điểm ta tìm được các tiếp tuyến tương ứng

$$d: y = y'_0(x - x_0) + y_0$$

Chú ý: Đề bài thường cho hệ số góc của tiếp

Ví dụ. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị

(C): $y = x^3 - 3x + 2$ có hệ số góc bằng 9.

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 3.$$

Gọi tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là $M(x_0; y_0)$,

suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là

$$k = y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$$

+ Với $x_0 = 2$ ta có $y_0 = 4$, suy ra tiếp điểm

$$M_1(2; 4).$$

+ Với $x_0 = -2$ ta có $y_0 = 0$, suy ra tiếp điểm

$$M_2(-2; 0).$$

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là

$$(d_1): y = 9(x-2) + 4 \Rightarrow (d_1): y = 9x - 14.$$

tuyến dưới các dạng sau:

+ Tiếp tuyến $d // \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = a$.

Sau khi lập được phương trình tiếp tuyến thì nhớ kiểm tra lại xem tiếp tuyến có bị trùng với đường thẳng Δ hay không? Nếu trùng thì phải loại đi kết quả đó.

+ Tiếp tuyến

$$d \perp \Delta: y = ax + b \Rightarrow k \cdot a = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{a}.$$

+ Tiếp tuyến tạo với trục hoành một góc α thì $k = \pm \tan \alpha$.

Tổng quát: Tiếp tuyến tạo với đường thẳng

$\Delta: y = ax + b$ một góc α .

Khi đó: $\left| \frac{k-a}{1+ka} \right| = \tan \alpha$

Cách 2. Sử dụng máy tính cầm tay

Phương trình tiếp tuyến cần lập có dạng

$$d: y = kx + m.$$

Tìm hoành độ tiếp điểm x_0 .

Nhập $k(-X) + f(X)$ (hoặc $f(X) - kX$) sau

đó bấm $\boxed{\text{CALC}}$ với $X = x_0$ rồi bấm $\boxed{=}$ ta được kết quả là m.

Phương trình tiếp tuyến tại M_2 là

$$(d_2): y = 9(x+2) + 0 \Rightarrow (d_2): y = 9x + 18.$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là

$$(d_1): y = 9x - 14; (d_2): y = 9x + 18.$$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$.

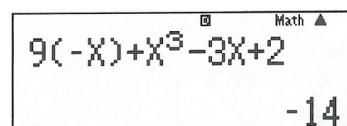
Gọi tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là $M(x_0; y_0)$.

Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là

$$k = y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$$

+ Với $x_0 = 2$ ta nhập $9(-X) + X^3 - 3X + 2$

$\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ ta được kết quả

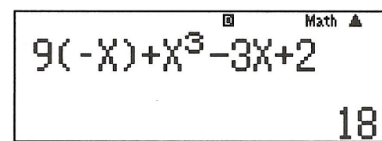


Vậy phương trình đường tiếp tuyến là

$$d_1: y = 9x - 14.$$

+ Với $x_0 = -2$ ta nhập $9(-X) + X^3 - 3X + 2$

$\boxed{\text{CALC}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{=}$ rồi bấm ta được kết quả là



Vậy phương trình đường tiếp tuyến là

$$d_2: y = 9x + 18$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x+2}$ song song với đường thẳng

$$(\Delta): 3x - y + 2 = 0.$$

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Ta có: $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$ và $(\Delta): 3x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 3x + 2$.

Gọi tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là $M(x_0; y_0)$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ) nên

$$k = \frac{3}{(x_0+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x_0+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0+2=1 \\ x_0+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ x_0=-3 \end{cases}$$

Cách 1.

+ Với $x_0 = -1$ suy ra $y_0 = -1$, suy ra tiếp điểm $M_1(-1; -1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_1 là: $d_1: y = 3(x+1) - 1 \Rightarrow d_1: y = 3x + 2$.

Lúc này: $d_1 \equiv \Delta$ nên không thỏa mãn.

+ Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 5$ ta có tiếp điểm $M_2(-3; 5)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_2 là $(d_2): y = 3(x+3) + 5 \Rightarrow (d_2): y = 3x + 14$.

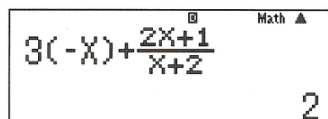
Vậy có một tiếp tuyến cần tìm là $d_2: y = 3x + 14$.

Cách 2. Sử dụng máy tính cầm tay

+ Với $x_0 = -1$ ta nhập:

$$3(-x) + \frac{2x+1}{x+2} \text{ (CALC) với } x = -1 \text{ rồi bấm } (=)$$

ta được kết quả là



Suy ra $d_1: y = 3x + 2 \Rightarrow d_1 \equiv \Delta$ (không thỏa mãn).

+ Với $x_0 = -3$ ta nhập:

$$3(-x) + \frac{2x+1}{x+2} \text{ (CALC) với } x = -3 \text{ rồi bấm } (=)$$

ta được kết quả là

$$3(-x) + \frac{2x+1}{x+2} = 14$$

Suy ra $d_2 : y = 3x + 14$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C). Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Tìm giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d : y = (m^2 - 4)x + 2m - 1$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1; -2) \in (C)$ là

$$\Delta : y + 2 = (3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -3x + 1.$$

$$\text{Khi đó: } \Delta // d \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = m^2 - 4 \\ 2m - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \Leftrightarrow m = -1. \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 2$ có đồ thị (C). Gọi A là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng 1. Tìm giá trị của tham số m để tiếp tuyến với đồ thị (C) tại A vuông góc với đường thẳng $\Delta : x - 4y + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x$.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm A.

Khi đó tiếp tuyến d có hệ số góc $k = y'(1) = 4 - 4(m+1) = -4m$.

Do đó: $d \perp \Delta \Leftrightarrow -4m \cdot \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow 4m = 4 \Leftrightarrow m = 1$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của

đồ thị (C) tại điểm có hệ số góc $k = 2$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y' = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x - 2)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 2$ nên

$$y'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 4x_0 + 5}{(x_0 - 2)^2} = 2 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

+ Với $x_0 = 1$ ta có $y_0 = 1$, suy ra phương trình tiếp tuyến

$$y = 2(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1.$$

+ Với $x_0 = 3$ ta có $y_0 = 1$, suy ra phương trình tiếp tuyến

$$y = 2(x - 3) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 5.$$

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 2x - 1$, $y = 2x - 5$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo

với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

Hướng dẫn giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C) là

$$\Delta: y = \frac{-4}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0 + 2}{x_0 - 1}$$

Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1 .

$$\frac{-4}{(x_0 - 1)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 3.$$

+ Với $x_0 = -1$ ta có $y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$.

+ Với $x_0 = 3$ ta có $y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$.

Bài toán 3. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tiếp tuyến đi qua một điểm cho trước

Phương pháp giải

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$.

Phương pháp giải

Cách 1: Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị

Bước 1: Phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$ hệ số góc k có dạng:

$$d: y = k(x - x_A) + y_A (*)$$

Bước 2: d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi

Ví dụ. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = -4x^3 + 3x + 1$ đi qua điểm $A(-1; 2)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -12x^2 + 3$.

Đường thẳng d đi qua $A(-1; 2)$ với hệ số góc k có phương trình $d: y = k(x + 1) + 2$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi

$$\text{hệ } \begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Bước 3: Giải hệ trên tìm được x , từ đó tìm ra k và thế vào phương trình (*), thu được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Cách 2:

Bước 1. Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm.

Tính hệ số góc tiếp tuyến $k = f'(x_0)$ theo x_0 .

Bước 2. Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$d: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) (**)$$

Vì điểm $A(x_A; y_A) \in d$ nên

$$y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + f(x_0)$$

Giải phương trình này sẽ tìm được x_0 .

Bước 3. Thay x_0 vừa tìm được vào (**) ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

$$\text{hệ phương trình } \begin{cases} -4x^3 + 3x + 1 = k(x + 1) + 2(1) \\ k = -12x^2 + 3(2) \end{cases} \text{ có}$$

nghiệm.

Thay k từ (2) vào (1) ta được:

$$-4x^3 + 3x + 1 = (-12x^2 + 3)(x + 1) + 2$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Với $x = -1$ ta có $k = -9$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = -9x + 7$.

+ Với $x = \frac{1}{2}$ ta có $k = 0$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = 2$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là $y = -9x - 7; y = 2$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{2x-1}{x+1}$ đi qua điểm $A(-1; 4)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Đường thẳng d đi qua $A(-1; 4)$ với hệ số góc k có phương trình $d: y = k(x + 1) + 4$.

$$\text{Đường thẳng } d \text{ là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ } \begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} = k(x+1) + 4(1) \\ k = \frac{3}{(x+1)^2}(2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Thay k từ (2) vào (1) ta được:

$$\frac{2x-1}{x+1} = \frac{3}{(x+1)^2}(x+1) + 4 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Vì $x \neq -1$ nên $x = -4 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến là $d: y = \frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$.

Ví dụ 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $f(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1$ đi qua điểm $M(2; -1)$.

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Gọi $N(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó ta có: $y_0 = \frac{x_0^2}{4} - x_0 + 1$; $f'(x_0) = \frac{x_0}{2} - 1$.

Phương trình tiếp tuyến tại N là $y = \left(\frac{x_0}{2} - 1\right)(x - x_0) + \frac{x_0^2}{4} - x_0 + 1$.

Mà tiếp tuyến đi qua $M(2; -1)$ nên

$$-1 = \left(\frac{x_0}{2} - 1\right)(2 - x_0) + \frac{x_0^2}{4} - x_0 + 1 \Leftrightarrow -\frac{x_0^2}{4} + x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0, y_0 = 1, f'(0) = -1 \\ x_0 = 4, y_0 = 1, f'(4) = 1 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến là $y = -x + 1$ và $y = x - 3$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Tìm các điểm trên đường thẳng $d: y = 9x - 14$ sao cho từ đó kẻ được hai tiếp tuyến với (C).

Hướng dẫn giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, phương trình tiếp tuyến có dạng

$$y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 2.$$

Gọi $M(m; 9m - 14)$ là điểm nằm trên đường thẳng $d: y = 9x - 14$.

Tiếp tuyến đi qua điểm M khi và chỉ $9m - 14 = (3x_0^2 - 3)(m - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 2$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)[2x_0^2 - (3m - 4)x_0 + 8 - 6m] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)[2x_0^2 - (3m - 4)x_0 + 8 - 6m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ 2x_0^2 - (3m - 4)x_0 + 8 - 6m = 0 = g(x_0)(1) \end{cases}$$

Yêu cầu đề bài tương đương với phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm bằng 2 hoặc phương trình (1) có nghiệm kép khác 2.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 24m - 48 > 0 \\ -12m + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 24m - 48 = 0 \\ -12m + 24 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ m = -4 \end{cases}$$

Vậy có 3 điểm M thỏa đề bài là

$$M_1(2; 4); M_2\left(\frac{4}{3}; -2\right); M_3(-4; -50).$$

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

- A. $y = x + 2$. B. $y = -x + 2$. C. $y = -x - 2$ D. $y = -x$

Câu 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (x+1)^2(x-2)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

- A. $y = -8x + 4$. B. $y = 9x + 18$. C. $y = -4x + 4$. D. $y = 9x - 18$

Câu 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3x^2$ tại điểm M có tung độ bằng 5 là

- A. $y = -12x - 7$ B. $y = 12x - 7$ C. $y = -12x + 17$ D. $y = 12x + 17$

Câu 4: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (2m-1)x + 2m - 3$ có đồ thị (C_m) . Với giá trị nào của tham số m thì tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: x - 2y - 4 = 0$?

- A. $m = -2$. B. $m = -1$. C. $m = 0$. D. $m = 4$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ có đồ thị cắt trục tung tại $A(0; -1)$, tiếp tuyến tại A có hệ số góc $k = -3$.

Các giá trị của a, b là

- A. $a = 1, b = 1$. B. $a = 2, b = 1$ C. $a = 1, b = 2$ D. $a = 2, b = 2$

Câu 6: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^3 + 9x^2$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ có phương trình là

- A. $y = 30x - 28$. B. $y = 30x + 28$. C. $y = 42x + 52$. D. $y = 42x - 52$.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C). Biết rằng khi $m = m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$ đi qua $A(1; 3)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $-1 < m_0 < 0$. B. $0 < m_0 < 1$. C. $1 < m_0 < 2$. D. $-2 < m_0 < -1$.

Câu 8: Phương trình tiếp tuyến của (C): $y = x^4 - 2x^2$ tại điểm có hoành độ bằng -2 là

- A. $y = -24x - 40$. B. $y = -24x + 40$
C. $y = 24x - 40$. D. $y = 24x + 40$

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x - 1$ có tọa độ tiếp tuyến là

- A. $A(0; -1)$ và $B(-2; 5)$. B. $A(0; -1)$

C. $B(-2;5)$.

D. $A(-1;0)$ và $B(5;-2)$.

Câu 10: Tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = x^3 + 3x^2 + 5$ vuông góc với đường $d: x + 9y = 0$ có phương trình là

A. $y = 9x; y = 9x + 32$.

B. $y = 9x - 22; y = 9x + 18$

C. $y = 9x; y = 9x - 32$

D. $y = 9x + 22; y = 9x - 18$

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ tiếp tuyến của đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $d: 3y - x + 6 = 0$ là

A. $y = -3x - 3; y = -3x - 11$.

B. $y = -3x - 3; y = -3x + 11$

C. $y = -3x + 3; y = -3x - 11$.

D. $y = -3x - 3; y = 3x - 11$

Câu 12: Tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = -x^4 - x^2 + 6$ vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = \frac{1}{6}x - 1$ có phương trình là

A. $y = -6x - 2$.

B. $y = -6x + 2$.

C. $y = -6x + 10$.

D. $y = -6x - 10$.

Câu 13: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm M có hoành độ $m^3 + 2m^2$ thuộc (C). Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc lớn nhất. Khi đó tổng giá trị các phần tử thuộc S bằng

A. -2.

B. 1.

C. 0.

D. -1.

Câu 14: Tập hợp các giá trị thực của tham số m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 - 2mx + 2018$ đều có hệ số góc không âm là

A. $(-6;0)$.

B. $[-6;0]$

C. $(-24;0)$

D. $[-24;0]$

Câu 15: Khoảng cách lớn nhất từ điểm $I(1;1)$ đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ bằng

A. $4\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. 2.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{3-x}{x+2}$ (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó cách đều hai điểm $A(-1;-2), B(1;0)$ là

A. $y = -5x - 1$.

B. $y = -5x + 1$.

C. $y = -5x + 3$.

D. $y = -5x - 3$.

Câu 17: Tập hợp các giá trị thực của tham số m để trên đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (4-3m)x + 1$ (C_m) tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại các điểm đó vuông góc với đường thẳng $d: x + 2y - 3 = 0$ là

A. $\left(0; \frac{2}{3}\right)$.

B. $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

C. $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$.

D. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại A, B. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $k_1.k_2 = \frac{1}{9}$.

B. $k_1.k_2 = \frac{1}{4}$.

C. $k_1.k_2 = \frac{1}{16}$.

D. $k_1.k_2 = 1$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) mà tiếp tuyến của (C) tại điểm đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{2}{5}$?

A. 4 điểm.

B. 1 điểm.

C. 2 điểm.

D. 3 điểm.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi Δ_1, Δ_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = x^2.f(4x-3)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Biết rằng hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 vuông góc nhau. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{3} < |f(1)| < 2$.

B. $|f(1)| < 2$.

C. $|f(1)| \geq 2$.

D. $2 \leq |f(1)| < 2\sqrt{3}$.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$ một góc α sao cho $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$ và tiếp điểm có hoành độ nguyên có phương trình là

A. $y = 9x; y = 9x - 32$.

B. $y = 9x - 21; y = 9x + 7$.

C. $y = 9x; y = 9x + 32$.

D. $y = 9x + 21; y = 9x - 7$.

Câu 22: Tìm $m \in \mathbb{R}$ để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ vuông góc với đường thẳng $y = -x$.

A. $m = \frac{10}{3}$.

B. $m = \frac{1}{3}$.

C. $m = \frac{10}{13}$.

D. $m = 1$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến có hoành độ tại $x_0 = 1$ của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = \frac{f(x)}{f(x^2)}$ có hệ số góc lần lượt là -10 và -3 . Tính giá trị của $f(1)$.

A. $f(1) = -10$.

B. $f(1) = \frac{-10}{3}$.

C. $f(1) = 4$.

D. $f(1) = -4$.

Câu 24: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp tất cả giá trị thực của k để đường thẳng $d: y = k(x+1) + 2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M, N, P sao cho các tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau. Biết $M(-1; 2)$, tích tất cả các phần tử của tập S bằng

A. $\frac{1}{9}$.

B. $-\frac{2}{9}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. -1 .

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}(C)$. Biết trên (C) có hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ điểm $I(-2; 2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại các điểm A, B là lớn nhất. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB = 4$.

B. $AB = 8$.

C. $AB = 4\sqrt{2}$.

D. $AB = 2\sqrt{2}$.

Câu 26: Hệ số góc của các tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ của đồ thị hàm số $y = f(x); y = g(x)$

và $y = \frac{f(x)+3}{g(x)+3}$ bằng nhau. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(1) \leq -\frac{11}{4}$. B. $f(1) < -\frac{11}{4}$. C. $f(x) \geq \frac{11}{4}$. D. $f(1) > \frac{11}{4}$.

Câu 27: Tọa độ điểm thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác vuông có diện tích bằng 2 là

- A. $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{4}{7}\right)$. B. $(0; -1)$. C. $\left(\frac{3}{4}; -4\right)$ D. $B\left(\frac{1}{4}; -\frac{4}{3}\right)$

Câu 28: Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (2m-1)x^4 - m + \frac{5}{4}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ vuông góc với đường thẳng $d: 2x - y - 3 = 0$.

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{7}{16}$. D. $\frac{9}{16}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C). Giả sử, đường thẳng $d: y = kx + m$ là tiếp tuyến của (C), biết rằng d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác $\triangle OAB$ cân tại gốc tọa độ O. Tổng $k + m$ có giá trị bằng

- A. 1. B. 3. C. -1. D. -3

Câu 30: Cho các hàm số $y = (x), y = f(f(x)), y = f(x^3 + 2)$ có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2), (C_3)$. Đường thẳng $x = 2$ cắt $(C_1), (C_2), (C_3)$ lần lượt tại A, B, C. Biết phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại A và của (C_2) tại B lần lượt là $y = 3x + 4$ và $y = 6x + 13$. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại C

- A. $y = 24x - 23$. B. $y = 10x - 21$. C. $y = 24x - 21$. D. $y = 10x - 5$

Câu 31: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; a)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua A?

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 32: Cho hàm số $y = |x|^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Hỏi trên trục Oy có bao nhiêu điểm A mà qua A có thể kẻ đến (C) đúng ba tiếp tuyến?

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 33: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Biết có hai điểm phân biệt A, B thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song nhau và $AB = 4\sqrt{2}$. Hỏi đường thẳng AB đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $M(-1; -2)$. B. $N(4; 2)$. C. $P(-1; 2)$. D. $Q(1; -2)$.

Câu 34: Phương trình tiếp tuyến của elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tại điểm $(x_0; y_0)$ là

- A. $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. B. $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. C. $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = -1$. D. $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = -1$.

Câu 35: Giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để đồ thị hàm số $(P): y = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 2$ cắt trục hoành tại hai điểm $x_1 < x_2$ sao cho phần phía trên Ox của tiếp tuyến với (P) tại mọi điểm có hoành độ $x_0 \in (-\infty; 3)$ và tung độ không âm hợp với tia Ox một góc tù là

- A. -4. B. 4. C. 3. D. -3.

Câu 36: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$. Giá trị nhỏ nhất của m sao cho tồn tại ít nhất một điểm $M \in (C)$ mà tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y = 2m - 1$ là

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 37: Cho hàm số $y = x^3 - \frac{m}{2}x^2 - m + 1$ có đồ thị là (C_m) . Có bao nhiêu giá trị m để tiếp tuyến của (C_m) tại giao điểm của nó với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 38: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B thỏa mãn $OA = 4OB$ là

- A. $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4} \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4} \end{cases}$

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^2(1+3x) = 9x - f^3(1-x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

- A. $y = x - 2$. B. $y = -x$. C. $y = -x - 2$. D. $y = x$.

Câu 40: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $I(1;2)$. Điểm $M(a;b), a > 0$ thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại M của (C) vuông góc với đường thẳng IM. Giá trị $a + b$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 5.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để trên đồ thị hàm số $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m-3)x + 2019$ có hai điểm nằm về hai phía của trục tung mà tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó cùng vuông góc với đường thẳng $(d): x + 2y + 6 = 0$?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 42: Gọi k_1, k_2, k_3 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị các hàm số $y = f(x), y = g(x), y = \frac{f(x)}{g(x)}$ tại $x = 2$ và thỏa mãn $k_1 = k_2 = 2k_3 \neq 0$ khi đó

- A. $f(2) < \frac{1}{2}$. B. $f(2) \leq \frac{1}{2}$. C. $f(2) \geq \frac{1}{2}$. D. $f(2) > \frac{1}{2}$.

Câu 43: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}(C)$. Phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân là

- A. $\begin{cases} y = -x - 11 \\ y = -x + 7 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = -x - 11 \\ y = -x + 17 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = -x + 17 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = -x + 7 \end{cases}$

Câu 44: Cho hàm số $f(x), g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = (10+x)(3-x)g(x), \forall x$ và hàm số $g(x) < 0, \forall x$. Xét hàm số $h(x) = f(2-x) + 2020$. Gọi α_0 là góc tạo bởi phần phía trên Ox của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $h(x)$ tại điểm x_0 và tia Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $90^\circ < \alpha_0 < 180^\circ$ khi $x_0 \in (-1; 12)$. B. $90^\circ < \alpha_0 < 180^\circ$ khi $x_0 \in (-1; +\infty)$.
C. $0^\circ < \alpha_0 < 90^\circ$ khi $x_0 \in (-\infty; 12)$. D. $0^\circ < \alpha_0 < 90^\circ$ khi $x_0 \in (-\infty; +\infty)$.

Câu 45: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị (C). Nếu điểm M thuộc $d: 2x - y + 1 = 0$ có hoành độ âm và từ điểm M kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C) thì tọa độ điểm M là

- A. $M(-1; -1)$. B. $M(-2; -3)$. C. $M(-3; -5)$ D. $M(-4; -7)$

Câu 46: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}(C)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{6}$ là

- A. $y = -3x + 1, y = -3x + 11, y = -12x + 2, y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$.
B. $y = -3x + 1, y = -3x - 11, y = -12x - 2, y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$.
C. $y = -3x + 11, y = -3x - 11, y = -12x, y = -\frac{4}{3}x - \frac{3}{4}$.
D. $y = -3x + 1, y = -3x + 11, y = -12x + 2, y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = xf(2x-1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Biết rằng hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sqrt{2} < |f(1)| < 2$. B. $|f(1)| \leq \sqrt{2}$. C. $|f(1)| \geq 2\sqrt{2}$. D. $2 \leq |f(1)| < 2\sqrt{2}$.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x); y = g(x); y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi k_1, k_2, k_3 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị các hàm số trên tại $x = 2$ và thỏa mãn $k_1 = k_2 = 2k_3 \neq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(2) \geq \frac{1}{2}$. B. $f(2) > \frac{1}{2}$ C. $f(2) < \frac{1}{2}$ D. $f(2) \leq \frac{1}{2}$

Câu 49: Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + 2m+1$ có đồ thị (C) (m là tham số thực). Gọi m_1, m_2 là các giá trị của m để đường thẳng $d: y = x + m + 1$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B, C bằng 19. Khi đó $m_1 + m_2$ bằng

- A. - 4. B. 2. C. 0. D. - 2.

Câu 50: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - mx + 2m - 3$ có đồ thị là (C), với m là tham số thực. Gọi T là tập tất cả các giá trị nguyên của m để mọi đường thẳng tiếp xúc với (C) đều có hệ số góc dương. Tổng các phần tử của T bằng

- A. 3. B. 6. C. - 6. D. - 3.

Câu 51: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$. Giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm và tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm đó vuông góc là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 7.

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a \neq 0$) có đồ thị (C) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt là $A(x_1; 0), B(x_2; 0), C(x_3; 0), D(x_4; 0)$, với x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và hai tiếp tuyến của (C) tại A, B vuông góc với nhau. Tính giá trị của biểu thức $S = 3[f'(x_3)]^2 + [f'(x_4)]^2$.

- A. $S = 9$. B. $S = 3$. C. $S = 4$. D. $S = 2$.

Câu 53: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$[f(1+2x)]^2 = x - [f(1-x)]^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

- A. $y = -x + \frac{6}{7}$. B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$. C. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. D. $y = \frac{1}{7}x - \frac{8}{7}$.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

- A. $y = 2x + 2$. B. $y = 4x - 6$. C. $y = 2x - 6$. D. $y = 4x - 2$.

Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$[f(1+2x)]^2 = x - [f(1-3x)]^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

- A. $y = x - 2$. B. $y = -\frac{x}{13} + 2$. C. $y = -\frac{x}{13} + \frac{1}{13}$. D. $y = -\frac{x}{13} - \frac{12}{13}$.

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$[f(-x+2)]^2 + [f(x+2)]^3 = 10x$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 2 là

- A. $y = 2x - 5$. B. $y = 2x - 3$. C. $y = -2x + 5$. D. $y = -2x + 3$.

Câu 57: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$, có đồ thị (C) với m là tham số thực. Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Giá trị của m để tiếp tuyến A với đồ thị (C) tại A cắt đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{16}{13}$. B. $-\frac{13}{16}$. C. $\frac{13}{16}$. D. $-\frac{16}{13}$.

Câu 58: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$2f(2x) + f(1-2x) = 4x^3 - x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 và bằng 0 lần lượt có dạng $y = ax + b$ và $a_1x + b_1$. Giá trị của $\frac{2a-5b}{3b_1+2a_1}$ bằng

- A. $\frac{5}{46}$. B. $\frac{46}{3}$ C. $\frac{3}{46}$ D. $\frac{46}{5}$

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Công thức tính đạo hàm

1 – A	2 – D	3 – C	4 – B	5 – D	6 – B	7 – B	8 – A	9 – B	10 – A
11 – D	12 – A	13 – A	14 – B	15 – D	16 – D	17 – D	18 – A	19 – D	20 – A
21 – C	22 – C	23 – D	24 – D	25 – C	26 – C	27 – D	28 – D	29 – D	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 6.

$$\text{Ta có } y' = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2+x)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(1) = -5$$

Câu 7.

$$\text{Ta có } y' = 5(1-x^3)^4 (1-x^3)' = -15x^2(1-x^3)^4$$

Câu 8.

$$\text{Ta có } y' = \frac{2(x-2)(1-x) - (x-2)^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$$

Câu 9.

$$\text{Ta có } y' = 10x^4 - x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 40x^3 - 3x^2 - 6x$$

Câu 10.

$$\text{Ta có } y' = 3x^5 + \frac{3}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Câu 11.

$$\text{Ta có } y' = 3\left(4 - \frac{10}{x^3}\right)\left(4x + \frac{5}{x^2}\right)^2$$

Câu 12.

Ta có $f'(x) = \left(\sqrt{2-3x^2}\right)' = \frac{(2-3x^2)'}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-6x}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}$

Câu 13.

Ta có $y' = f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)' = \frac{x' \cdot \sqrt{4-x^2} - x \cdot (\sqrt{4-x^2})'}{4-x^2} = \frac{\sqrt{4-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} \Rightarrow y'(0) = \frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2}$

Câu 14.

Ta có $y' = -\frac{(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = \frac{-(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1} \cdot (x^2+1)} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1} \cdot (x^2+1)} \Rightarrow a = -1$

Câu 15.

Ta có $y' = 2x + \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}$

Câu 16.

Ta có $y' = 3(x^2 + 5x + 6)^2 + 2(x+3)(x+2)^3$

Câu 17.

Ta có $y' = 7(-x^2 + 3x + 7)^6 (-x^2 + 3x + 7)' = 7(-2x + 3)(-x^2 + 3x + 7)^6$

Câu 18.

Ta có $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

Câu 19.

Ta có $y' = (x^2\sqrt{x})' = (x^2)' \cdot \sqrt{x} + (x^2)' \cdot x^2 = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{5x\sqrt{x}}{2}$

Câu 20.

Ta có $y' = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \Rightarrow ab = -2$

Câu 21.

Ta có $y = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{x^2+2x-3} \Rightarrow y' = -\frac{(x^2+2x-3)'}{(x^2+2x-3)^2} = -\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$

Câu 22.

Ta có

$f'(x) = (2017+2x)(2016+3x)\dots(1+2018x) + \dots + 2(2018+x)(2016+3x)\dots(1+2018x) +$

$$\dots + 2018(2018+x)(2017+2x)\dots(1+2017x)$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } f'(1) &= 2019^{2017} + 2.2019^{2017} + 3.2019^{2017} + \dots + 2018.2019^{2017} = 2019^{2017} (1+2+3+\dots+2018) \\ &= 2019^{2017} \cdot \frac{2018.2019}{2} = 1009.2019^{2018} \end{aligned}$$

Câu 23.

$$\text{Ta có } y' = \frac{\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{(a^2-x^2)} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$$

Câu 24.

$$\text{Ta có } y' = \sqrt{x^2+x+1} + (x+1) \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{4x^2+5x+3}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

Câu 25.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}} \right)' &= \frac{(3-2x)' \sqrt{4x-1} - (3-2x)(\sqrt{4x-1})'}{(\sqrt{4x-1})^2} = \frac{-2\sqrt{4x-1} - (3-2x) \cdot \frac{2}{\sqrt{4x-1}}}{4x-1} \\ &= \frac{-2(4x-1) - 2(3-2x)}{(4x-1)\sqrt{4x-1}} \\ &= \frac{-4x-4}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a = -4, b = 4. \text{ Vậy } \frac{a}{b} = -1.$$

Câu 26.

$$\text{Đặt } u(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n).$$

Ta có:

$$f(x) = x.u(x) \Rightarrow f'(x) = u(x) + x.u'(x) = (x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n) + x.u'(x) \Rightarrow f'(0) = 1.2.3.4\dots n = n!$$

Câu 27.

$$\text{Ta có } f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2g(x) + 36x = 0(1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1) ta được:

$$\begin{aligned} 3f^2(2-x) \cdot [f(2-x)]' - 4 \cdot f(2+3x) \cdot [f(2+3x)]' + 2xg(x) + x^2g'(x) + 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow -3f^2(2-x) \cdot f'(2-x) - 12 \cdot f(2+3x) \cdot f'(2+3x) + 2xg(x) + x^2g'(x) + 36 &= 0(2) \end{aligned}$$

$$\text{Thế } x=0 \text{ vào (1) ta được } f^3(2) - 2f^2(2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ f(2) = 2 \end{cases}$$

Với $f(2) = 0$ thế $x=0$ vào (2) ta có: $36 = 0$ (vô lý).

Với $f(2) = 2$ thế $x = 0$ vào (2) ta có:

$$-3f^2(2).f'(2) - 12f(2).f'(2) + 36 = 0 \Leftrightarrow -3.2^2.f'(2) - 12.2.f'(2) + 36 = 0 \Leftrightarrow f'(2) = 1.$$

$$\text{Vậy } A = 3f(2) + 4f'(2) = 3.2 + 4.1 = 10$$

Câu 28.

$$\text{Ta có } f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x, f'[g(1)] = f'(3) = 6$$

$$\left[f(g(x)) \right]'(x) = f'(g(x)).g'(x) = 30, \text{ suy ra } \left[f(g(x)) \right]'(1) = f'(g(1)).g'(1) = 30$$

Câu 29.

Ta có

$$(f(x) - f(2x))' = f'(x) - 2f'(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ f'(2) - 2f'(4) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ 2f'(2) - 4f'(4) = 14 \end{cases} \Rightarrow f'(1) - 4f'(4) = 19$$

$$\text{Vậy } f'(1) - f'(4) = 19.$$

Dạng 2. Đạo hàm của hàm số lượng giác.

1 – A	2 – A	3 – D	4 – A	5 – B	6 – D	7 – B	8 – D	9 – A	10 – A
11 – B	12 – D	13 – D	14 – B	15 – A	16 – D	17 – C	18 – C	19 – D	20 – B
21 – C	22 – A	23 – C	24 – D	25 – C	26 – D	27 – C	28 – C		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:

$$\text{Ta có } y' = (5\sin x)' - (3\cos x)' = 5\cos x + 3\sin x.$$

Câu 2:

$$\text{Ta có } y' = \frac{(3x + 2\tan x)'}{2\sqrt{3x + 2\tan x}} = \frac{3 + 2(1 + \tan^2 x)}{2\sqrt{3x + 2\tan x}} = \frac{5 + 2\tan^2 x}{2\sqrt{3x + 2\tan x}}$$

Câu 3:

$$\text{Ta có } y' = (\cos 3x)' \cdot \sin 2x + \cos 3x \cdot (\sin 2x)' = -3\sin 3x \cdot \sin 2x + 2\cos 3x \cdot \cos 2x$$

$$\text{Do đó } y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3\sin \pi \cdot \sin \frac{2\pi}{3} + 2\cos \pi \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 1.$$

Câu 4:

$$\text{Ta có } y' = 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \cdot \sin x$$

Câu 5:

Bước đầu tiên sử dụng đạo hàm hàm tổng, sau đó sử dụng $(\sin u)', (\cos u)'$

$$y' = (\sin(\cos x))' + (\cos(\sin x))' = \cos(\cos x) \cdot (\cos x)' - \sin(\sin x) \cdot (\sin x)'$$

$$= -\sin x \cdot \cos(\cos x) - \cos x \cdot \sin(\sin x) = -(\sin x \cdot \cos(\cos x) + \cos x \cdot \sin(\sin x))$$

Câu 6:

$$\text{Ta có } y = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

$$\text{Do đó } y' = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \right)' = \frac{1}{4} (\cos 4x)' = \frac{1}{4} (-\sin 4x) \cdot (4x)' = -\sin 4x.$$

Câu 7.

$$\text{Ta có: } y' = 10 \cos 2x + 20 \sin 5x, \text{ suy ra } \begin{cases} a = 20 \\ b = 10 \end{cases}. \text{ Vậy } a - b = 10.$$

Câu 8.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2}{\cos(\pi x)} = 2 \cdot (\cos(\pi x))' \cdot \frac{-1}{\cos^2(\pi x)} = 2 \cdot \pi \frac{\sin(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \Rightarrow f'(3) = 2\pi \cdot \frac{\sin 3\pi}{\cos^2 3\pi} = 0$$

Câu 9.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\cos \sqrt{x} - \sin \sqrt{x}) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

Câu 10.

$$\text{Ta có } y' = (\sin^2 x)' \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot (\cos x)' = 2 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x.$$

Câu 11.

$$\text{Ta có } f'(x) = 2 \cos x - a \sin x - 3 = 0 \text{ có nghiệm khi và chỉ khi } 4 + a^2 \geq 9 \Leftrightarrow a^2 \geq 5 \Leftrightarrow |a| \geq \sqrt{5}$$

Câu 12.

$$\text{Ta có } y' = \cos x \Rightarrow y = \sin x + C \text{ (C: hằng số).}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = 0. \text{ Vậy } y = \sin x$$

Câu 13.

$$\text{Ta có } y' = 2(\sqrt{\sin x})' - 2(\sqrt{\cos x})' = 2 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} + 2 \sin x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$$

Câu 14.

$$\text{Ta có } f(x) = \sin^3 ax \Rightarrow f'(x) = 3a \sin^2 ax \cos ax \Rightarrow f'(\pi) = 3a \sin^2 a\pi \cdot \cos a\pi = 0$$

Câu 15.

$$\text{Ta có } y' = \frac{\cos x (\sin x - \cos x) - \sin x (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}$$

Câu 16.

$$\text{Ta có } y' = \frac{(\cos 2x)' \cdot (1 - \sin x) - \cos 2x (1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)^2} = \frac{-2 \sin 2x (1 - \sin x) + \cos 2x \cdot \cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$\text{Suy ra } y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}} = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

Câu 17.

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)}{2} + \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)}{2} + \frac{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)}{2} + \frac{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)}{2} - 2 \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) \right] + \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) \right] - 2 \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2 + \cos(\pi - 2x) \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos(\pi + 2x) \cdot \cos \frac{\pi}{3} - 2 \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{2} [\cos(\pi - 2x) + \cos(\pi + 2x)] - 2 \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2 - \cos 2x - 2 \sin^2 x \Leftrightarrow f(x) = 1. \text{ Suy ra } f'(x) = 0$$

Câu 18.

$$\text{Ta có } y' = \cos(\pi \sin x) \cdot (\pi \sin x)' = \pi \cos x \cdot \cos(\pi \sin x)$$

$$\text{Suy ra } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \pi \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\pi \sin \frac{\pi}{6}\right) = \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Câu 19.

Đầu tiên áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u = \sin(\cos(\tan^4 3x))$ ta có:

$$y' = 2 \sin(\cos(\tan^4 3x)) \cdot [\sin(\cos(\tan^4 3x))]'$$

Sau đó áp dụng $(\sin u)'$; với $u = \cos(\tan^4 3x)$ ta có:

$$y' = 2 \sin(\cos(\tan^4 3x)) \cdot \cos(\cos(\tan^4 3x)) \cdot (\cos(\tan^4 3x))'$$

Áp dụng $(\cos u)'$, với $u = \tan^4 3x$

$$y' = -\sin(2 \cos(\tan^4 3x)) \cdot (\sin(\tan^4 3x)) \cdot (\tan^4 3x)'$$

Áp dụng $(u^\alpha)'$, với $u = \tan 3x$

$$y' = -\sin(2 \cos(\tan^4 3x)) \cdot (\sin(\tan^4 3x)) \cdot 4 \tan^3 3x \cdot (\tan 3x)'$$

$$\Rightarrow y' = -\sin(2 \cos(\tan^4 3x)) \cdot (\sin(\tan^4 3x)) \cdot 4 \tan^3 3x \cdot (1 + \tan^2 3x) \cdot (3x)'$$

$$\Rightarrow y' = -\sin(2 \cos(\tan^4 3x)) \cdot (\sin(\tan^4 3x)) \cdot 4 \tan^3 3x \cdot (1 + \tan^2 3x) \cdot 3$$

Câu 20.

$$\text{Ta có } y' = \frac{(\cot 2x)'}{2\sqrt{\cot 2x}} = \frac{-2(1 + \cot^2 2x)}{2\sqrt{\cot 2x}} = \frac{-(1 + \cot^2 2x)}{\sqrt{\cot 2x}}$$

Câu 21.

$$\text{Ta có } y' = (\tan x - \cot x)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x}$$

Câu 22.

$$\text{Ta có } y' = 2 \tan \frac{x}{2} \cdot \left(\tan \frac{x}{2} \right)' = \frac{\tan \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

Câu 23.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x - (-\sin x))(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) + (\sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2} \end{aligned}$$

Câu 24.

$$\text{Ta có } y' = (\sqrt{\cos 6x})' = \frac{(\cos 6x)'}{2\sqrt{\cos 6x}} = \frac{-6 \sin 6x}{2\sqrt{\cos 6x}} = \frac{-3 \sin 6x}{\sqrt{\cos 6x}}$$

Câu 25.

$$\text{Ta có } y' = (x^2)' \tan x + (\tan x)' \cdot x^2 + (\sqrt{x})' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Câu 26.

$$\text{Ta có } f(\sin x + 1) + f(\cos x) = \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right), \text{ đạo hàm 2 vế ta được}$$

$$\cos x \cdot f'(\sin x + 1) - \sin x f'(\cos x) = -2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot f'(\sin x + 1) - \sin x f'(\cos x) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) (*)$$

Thay $x = 0$ vào phương trình (*), ta được $f'(1) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f'(1) = 1$

Câu 27.

$$\begin{aligned} y' &= -(\tan^2 x)' \cdot \sin(\tan^2 x) = -2(\tan x)' \cdot \tan x \cdot \sin(\tan^2 x) \\ &= -2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan x \cdot \sin(\tan^2 x) = -2 \tan x \cdot (\tan^2 x + 1) \cdot \sin(\tan^2 x). \end{aligned}$$

Câu 28.

$$\text{Ta có } y' = \frac{\left[2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)\right]'}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}} = \frac{1 + \tan^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)' = \frac{1 + \tan^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{2 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức đạo hàm, tìm giới hạn, giải phương trình và bất phương trình chứa đạo hàm

1 – A	2 – C	3 – B	4 – D	5 – C	6 – B	7 – C	8 – A	9 – A	10 – B
11 – D	12 – A	13 – C	14 – A	15 – D	16 – C	17 – B	18 – B	19 – C	20 – B
21 – D	22 – A	23 – A	24 – B	25 – C	26 – B	28 – B			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

$$\text{Ta có } y = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow y^3 = 1-x \Rightarrow 3y^2 y' = -1 \Rightarrow 3y'y^2 + 1 = 0$$

Câu 2.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}. \text{ Xét phương trình } f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ (thỏa}$$

mãn)

Câu 3.

$$\text{Ta có } y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y'\sqrt{1+x^2} = y \Rightarrow y'\sqrt{1+x^2} - y = 0$$

Câu 4.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3(m-1)x^2 + 4(m-1)x + m$$

Với $m = 1$: $f'(x) = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Với } m \neq 1: f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m^2-5m+4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 1 < m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 4$$

Vậy $m \in [1; 4)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 5.

$$\text{Ta có } f(x) = k\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = (k\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})' = k(\sqrt[3]{x})' + (\sqrt{x})'$$

$$\text{Đặt } y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y^3 = x \Rightarrow 3y^2 y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

$$f'(x) = k(\sqrt[3]{x})' + (\sqrt{x})' = \frac{k}{3(\sqrt[3]{x})^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}. \text{ Vậy để } f'(1) = \frac{3}{2} \text{ thì } \frac{k}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow k = 3.$$

Câu 6.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x - 9. \text{ Xét phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3$$

Câu 7.

$$\text{Ta có } y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, \text{ suy ra } y \cdot y' = \sqrt{2x-x^2} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = 1-x$$

Câu 8.

$$\text{Ta có } f'(x) = (2x^3 + 3x^2 - 36x - 1)' = 6x^2 + 6x - 36$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Câu 9.

$$\text{Ta có } f'(x) = (x^3 + 2x^2 - 7x + 3)' = 3x^2 + 4x - 7, \text{ suy ra } f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 7 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{3} \leq x \leq 1$$

Câu 10.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}. \text{ Do đó } y' = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Câu 11.

Ta có:

$$y' = \left(\frac{x^2 + 3x + 3}{x+1} \right)' = \frac{(x^2 + 3x + 3)'(x+1) - (x^2 + 3x + 3)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2 + 3x + 3)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$\text{Suy ra } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Câu 12.

Ta có $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$. Khi đó $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Câu 13.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Khi đó $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$.

Câu 14.

Ta có $f'(x) = -8\sin(8x+2) \geq -8, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 15.

Ta có: $y' = (\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2x + 2020)' = \sqrt{3}\cos x - \sin x - 2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$x \in [0; 2020\pi] \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 2020\pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{12121}{12}$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2; \dots; 1010\}$. Vậy có 1010 nghiệm thỏa mãn yêu cầu.

Câu 16.

Ta có $f'(x) = 2\cos 2x$, suy ra $3f(x) + 2f'(x) = 5 \Leftrightarrow 3\sin 2x + 4\cos 2x = 5 \Leftrightarrow \sin(2x + \alpha) = 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ với } \alpha \text{ là một cung thỏa mãn } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{3}{5} \\ \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}.$$

Vậy có hai điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho các nghiệm của $3f(x) + 2f'(x) = 5$

Câu 17.

Ta có: $f'(x) = 3x^3 - x - 4$, suy ra $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^3 - x - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{4}{3}$

Câu 18.

Ta có $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1\right)' = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Câu 19.

Ta có $f'(x) = mx^2 - mx + (3 - m)$

+ Nếu $m = 0$ thì $f'(x) = 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

+ Nếu $m \neq 0$ thì $f'(x) = mx^2 - mx + (3 - m)$ là tam thức bậc hai.

$$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 4m(3-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 5m^2 - 12m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{12}{5}. \text{ Vậy } 0 \leq m < \frac{12}{5}$$

Câu 20.

$$f(x) = -x^3 + 3mx^2 - 12x + 3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6mx - 12.$$

$$f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3x^2 + 6mx - 12 \leq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < 0 \\ 9m^2 - 36 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 21.

$$\text{Đặt } f(x) = (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+2018x)$$

$f(x)$ là hàm số đa thức nên nó liên tục và có đạo hàm trên tập số thực $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(0) = 1 \text{ và } f'(x) = 1 \cdot (1+2x)\dots(1+2018x) + 2(1+x)\dots(1+2018x) + \dots + 2018(1+x)\dots(1+2017x)$$

$$\Rightarrow f'(0) = 1 + 2 + 3 + \dots + 2018 = 2018 \cdot \frac{2018+1}{2} = 1009 \cdot 2019.$$

$$\text{Khi đó ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+2018x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0).$$

Câu 22.

$$\text{Ta có } f'(x) = 6[x^2 + (a+2)x + a^2] \text{ nên } f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + (a+2)x + a^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (a+2)^2 - 4a^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2 \\ a < -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Mặt khác } f'(-1) = 6 \Leftrightarrow 6[(-1)^2 + (a+2)(-1) + a^2] = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } a = -1.$$

Câu 23.

$$\text{Ta có } g'(x) = -3x^2 \cdot f'(4-x^3).$$

$$\text{Ta có: } g'(x) > 0 \Leftrightarrow -3x^2 \cdot f'(4-x^3) > 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot f'(4-x^3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ f'(4-x^3) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -4 < 4-x^3 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -8 < -x^3 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1 < x^3 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Câu 24.

+ Khi $0 < x < x_0$ ta có $f(x) = a\sqrt{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(0; x_0)$ nên liên tục trên khoảng $(0; x_0)$.

+ Khi $x > x_0$ ta có $f(x) = x^2 + 12 \Rightarrow f'(x) = 2x$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(x_0; +\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(x_0; +\infty)$.

+ Tại $x = x_0$ ta có

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a\sqrt{x} - a\sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{a}{2\sqrt{x_0}};$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x^2 + 12 - (x_0^2 + 12)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x + x_0) = 2x_0.$$

Hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0$$

Khi đó $f'(x_0) = \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0$ và $f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{x}} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ 2x & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$ nên hàm số f có đạo hàm liên tục trên

khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0 \Leftrightarrow a = 4x_0\sqrt{x_0} \quad (1)$$

Lại có hàm số f liên tục tại x_0 nên $x_0^2 + 12 = a\sqrt{x_0} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x_0 = 2$ và $a = 8\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } S = a + x_0 = 2(1 + 4\sqrt{2}).$$

Câu 25.

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2} \Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2) + 2f(2) - xf(2)}{x - 2} \Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(f(x) - f(2))}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2)(x - 2)}{x - 2} \\ &\Leftrightarrow I = 2f'(2) - f(2). \end{aligned}$$

Câu 26.

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt[n]{1 + 3x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + 3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \frac{3}{n}.$$

Dạng 4. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

1 - B	2 - D	3 - B	4 - A	5 - B	6 - A	7 - B	8 - A	9 - C	10 - A
11 - A	12 - C	13 - A	14 - B	15 - D	16 - A	17 - C	18 - D	19 - C	20 - C

21 – A	22 – A	23 – B	24 – A	25 – C	26 – A	27 – C	28 – D	29 – D	30 – A
31 – A	32 – C	33 – B	34 – A	35 – B	36 – A	37 – D	38 – A	39 – B	40 – D
41 – C	42 – B	43 – D	44 – A	45 – A	46 – D	47 – C	48 – D	49 – D	50 – D
51 – C	52 – C	53 – C	54 – D	55 – D	56 – A	57 – C	58 – D		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(0).x + y(0) \Leftrightarrow y = -x + 2$

Câu 2.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 0$

$$y = (x+1)^2(x-2) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(2) = 9.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9(x-2) + 0 \Leftrightarrow y = 9x - 18$

Câu 3.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $2x^3 + 3x^2 = 5 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có: $y' = 6x^2 + 6x \Rightarrow y'(1) = 12$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 12(x-1) + 5 = 12x - 7 \Leftrightarrow y = 12x - 7$

Câu 4.

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 2m - 1 = -3(x^2 - 2x + 1) + 2m + 2 = -3(x-1)^2 + 2m + 2 \leq 2m + 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó giá trị lớn nhất của y' là $2m + 2$, đạt tại $x_0 = 1$

Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 4m - 2$

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại $M(1; 4m - 2)$ là

$$d: y - (4m - 2) = (2m + 2)(x - 1) \Leftrightarrow y = (2m + 2)x + 2m - 4$$

Theo đề bài ta có $\Delta: x - 2y - 4 = 0$ hay $\Delta: y = \frac{1}{2}x - 2$

$$d \perp \Delta \Leftrightarrow 2m + 2 = -2 \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 5.

$$A(0; -1) \in (C): y = \frac{ax+b}{x-1} \Rightarrow \frac{b}{-1} = -1 \Leftrightarrow b = 1. \text{ Ta có } y' = \frac{-a-b}{(x-1)^2}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm A là $k = y'(0) = -a - b \Leftrightarrow -3 = -a - b \Leftrightarrow a = 3 - b = 2$

Câu 6.

$$y' = -\frac{3}{2}x^2 + 18x \Rightarrow y'(2) = 30; y(2) = 32.$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 2$ có phương trình $y = 30(x - 2) + 32$ hay $y = 30x - 28$.

Câu 7.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1$

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 2m - 1$, gọi $B(-1; 2m - 1) \Rightarrow \overline{AB} = (-2; 2m - 4)$

Tiếp tuyến tại B đi qua A nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -m + 2$

Mặt khác hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(x_0) \Leftrightarrow 3(x_0)^2 + 6m_0x_0 + m_0 + 1 = -m_0 + 2$

$$\Leftrightarrow 3 - 6m_0 + m_0 + 1 = -m_0 + 2 \Leftrightarrow -4m_0 = -2 \Leftrightarrow m_0 = \frac{1}{2}.$$

Câu 8.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$.

Với $x_0 = -2$ thì $y_0 = 8$, $y'(-2) = -24$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-2; 8)$ là $y = -24(x + 2) + 8 \Leftrightarrow y = -24x - 40$.

Câu 9.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$.

Vì tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x - 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 3$.

Suy ra hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $\frac{3}{(x+1)^2} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Trường hợp 1: $x = 0$, suy ra tung độ của tiếp điểm là $y_0 = -1$.

Phương trình của tiếp tuyến là: $y + 1 = 3(x - 0) \Leftrightarrow y = 3x - 1$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $x = -2$, suy ra tung độ của tiếp điểm là $y_0 = 5$

Phương trình của tiếp tuyến là: $y - 5 = 3(x + 2) \Leftrightarrow y = 3x + 11$ (thỏa mãn).

Vậy tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến là $B(-2; 5)$

Câu 10.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x$; $d: x + 9y = 0$ hay $y = -\frac{1}{9}x$.

Gọi d' là tiếp tuyến của (C) vuông góc với d và có tiếp điểm $M(x_0; y_0)$

Do $d' \perp d$ nên d' có hệ số góc $k = 9$. Do đó $y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 9 \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 5 \end{cases}$

+ Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_1(1;9)$ là: $y = 9(x-1) + 9 \Leftrightarrow y = 9x$.

+ Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_2(-3;5)$ là: $y = 9(x+3) + 5 \Leftrightarrow y = 9x + 32$.

Câu 11.

$$d: 3y - x + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - 2 \Rightarrow k_d = \frac{1}{3}$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}$

$$\text{Tiếp tuyến vuông góc với } d \Rightarrow k_{tt} \cdot k_d = -1 \Leftrightarrow k_{tt} = -\frac{1}{k_d} = -3 \Rightarrow y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 4x_0 + 3}{(x_0 + 2)^2} = -3$$

$$\Leftrightarrow 4x_0^2 + 16x_0 + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2} \\ x_0 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Với $x_0 = -\frac{3}{2}$ ta có $y_0 = \frac{3}{2}$, suy ra phương trình tiếp tuyến $y = -3\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = -3x - 3$

Với $x_0 = -\frac{5}{2}$ ta có $y_0 = -\frac{7}{2}$, suy ra phương trình tiếp tuyến $y = -3\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = -3x - 11$

Câu 12.

Ta có: $y' = -4x^3 - 2x$

Gọi d là tiếp tuyến của (C) vuông góc với $\Delta: y = \frac{1}{6}x - 1$ và có tiếp điểm là $M_0(x_0; y_0)$

Do $d \perp \Delta$ nên d có hệ số góc $k = -6$

$$\text{Khi đó } k = -6 \Leftrightarrow y'(x_0) = -6 \Leftrightarrow -4x_0^3 - 2x_0 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 4$$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(1;4)$ là: $y = -6(x-1) + 4 \Leftrightarrow y = -6x + 10$

Câu 13.

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$

Đặt $m^3 + 2m^2 = x_0$, hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M là

$$k = y'(x_0) = -3x_0^2 + 6x_0 = 3 - 3(x_0 - 1)^2 \leq 3 \text{ với mọi } x_0 \in \mathbb{R}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_0 = 1$

Vậy $k_{\max} = 3$ khi và chỉ khi $x_0 = 1$, từ đó ta có

$$m^3 + 2m^2 = 1 \Leftrightarrow m^3 + 2m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (m+1)(m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Suy ra tập $S = \left\{ -1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$

Khi đó, tổng giá trị các phân tử thuộc S là $-1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -2$

Câu 14.

$$y = x^3 - mx^2 - 2mx + 2018 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2mx - 2m$$

Hệ số góc của mỗi tiếp tuyến không âm khi và chỉ khi

$$y' = 3x^2 - 2mx - 2m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta'_{y'} = m^2 + 6m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-6; 0]$$

Câu 15.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ m là

$$y = -\frac{2}{(m-1)^2}(x-m) + \frac{m+1}{m-1} \Leftrightarrow 2x + (m-1)^2 y - m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\text{Do đó } d(I, d) = \frac{|2 \cdot 1 + (m-1)^2 \cdot 1 - m^2 - 2m + 1|}{\sqrt{2^2 + (m-1)^4}} = \frac{4|m-1|}{\sqrt{4 + (m-1)^4}} \leq \frac{4|m-1|}{\sqrt{2}\sqrt{4(m-1)^4}} = 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } (m-1)^4 = 4 \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{2}$$

Câu 16.

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ } x = m \text{ là } y = -\frac{5}{(m+2)^2}(x-m) + \frac{3-m}{m+2}$$

Để tiếp tuyến đó cách đều 2 điểm $A(-1; -2), B(1; 0)$ thì có 2 khả năng

$$+) \text{ Tiếp tuyến đó song song với } AB \Rightarrow k_{TT} = k_{AB} \Leftrightarrow -\frac{5}{(m+2)^2} = \frac{0-(-2)}{1-(-1)} \text{ (vô nghiệm).}$$

$$+) \text{ Tiếp tuyến đó đi qua trung điểm của } AB \Rightarrow \frac{-2+0}{2} = -\frac{5}{(m+2)^2} \left(\frac{-1+1}{2} - m \right) + \frac{3-m}{m+2} \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = -5x - 1$

Câu 17.

$$\text{Ta có: } y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$$

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y' \cdot \frac{-1}{2} = -1$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt hay

phương trình $mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m = 2 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 4m^2 - 4m + 1 > 0 \\ S = \frac{2(1-m)}{m} > 0 \\ P = \frac{2-3m}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < m < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ là những giá trị cần tìm.

Câu 18.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{-x+1}{2x-1} = x+m \Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - 1 - m = 0$. Theo Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = \frac{-1-m}{2} \end{cases}$

$$y' = \frac{-1}{(2x-1)^2} \Rightarrow k_1 k_2 = \frac{1}{(2x_1-1)^2 (2x_2-1)^2} = \frac{1}{[4x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1]^2} = \frac{1}{(-2 - 2m + 2m + 1)^2} = 1$$

Câu 19.

$$y' = -\frac{5}{(x-2)^2}$$

Gọi $M\left(m; \frac{2m+1}{m-2}\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại M: $y = \frac{-5}{(m-2)^2}(x-m) + \frac{2m+1}{m-2} (d)$

$$\{A\} = (d) \cap Ox \Rightarrow A\left(\frac{2m^2 + 2m - 2}{5}; 0\right)$$

$$\{B\} = (d) \cap Oy \Rightarrow B\left(0; \frac{2m^2 + 2m - 2}{(m-2)^2}\right)$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left| \frac{2m^2 + 2m - 2}{5} \right| \left| \frac{2m^2 + 2m - 2}{(m-2)^2} \right| = \frac{2}{5} \frac{(m^2 + m - 1)^2}{(m-2)^2} = \frac{2}{5} \left(\frac{m^2 + m - 1}{m-2} \right)^2$$

$$S_{OAB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m^2 + m - 1}{m-2} = 1 \\ \frac{m^2 + m - 1}{m-2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

Vậy tìm được hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20.

Ta có $y' = (x^2 \cdot f(4x-3))' = 2x \cdot f(4x-3) + x^2 \cdot 4 \cdot f'(4x-3)$

Vì Δ_1, Δ_2 vuông góc nhau nên $f'(1) \cdot (2f(1) + 4f'(1)) = -1 \Leftrightarrow 4(f'(1))^2 + 2f(1) \cdot f'(1) + 1 = 0$

Để tồn tại $f'(1) \Leftrightarrow \Delta' = f^2(1) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |f(1)| \geq 2$

Câu 21.

Đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$ có vector pháp tuyến là: $\vec{n_1} = (1; 1)$

Gọi $(d): y = kx + m$ là tiếp tuyến cần tìm $\Rightarrow d$ có vector pháp tuyến là $\vec{n_1} = (k; -1)$

Theo giả thiết, ta có: $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}} \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n_1}, \vec{n_2}) \right| = \frac{4}{\sqrt{41}} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{4}{\sqrt{41}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{41}|k-1| = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{k^2+1} \Leftrightarrow 9k^2 - 82k + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 9 \\ k = \frac{1}{9} \end{cases}$$

+) Với $k = 9$ thì $d: y = 9x + m$

d tiếp xúc với (C) khi hệ $\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x = 9x + m & (1) \\ 3x^2 - 12x + 9 = 9 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y = 9x \\ x = 4 \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -32 \Rightarrow y = 9x - 32 \end{cases}$

+) Với $k = \frac{1}{9}$ thì $d: y = \frac{1}{9}x + m$

d tiếp xúc với (C) khi hệ $\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x = \frac{1}{9}x + m & (3) \\ 3x^2 - 12x + 9 = \frac{1}{9} & (4) \end{cases}$ có nghiệm

Ta có: $(4) \Leftrightarrow 27x^2 - 108x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm 2\sqrt{21}}{9} \notin \mathbb{Z}$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán có phương trình là: $y = 9x; y = 9x - 32$

Câu 22.

$$y' = 3x^2 - 4x + m - 1 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + m - \frac{7}{3} \geq m - \frac{7}{3} \Rightarrow y' \geq m - \frac{7}{3} \Rightarrow y' = m - \frac{7}{3} \text{ khi } x = \frac{2}{3}.$$

Theo bài toán ta có: $y'(-1) = -1 \Leftrightarrow \left(m - \frac{7}{3}\right)(-1) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{10}{3}$

Câu 23.

$$\text{Ta có } y' = \left(\frac{f(x)}{f(x^2)} \right)' = \frac{f(x^2) \cdot f'(x) - f(x) \cdot 2x \cdot f'(x^2)}{f^2(x^2)} = T(x)$$

Từ giả thiết ta có $f'(1) = -10$ và $T(1) = -3, f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Do đó } 10f(1) = -3f^2(1) \Leftrightarrow f(1) = \frac{-10}{3}$$

Câu 24.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$x^3 - 3x = k(x+1) + 2 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 2 - k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ x^2 - x - 2 - k = 0 \quad (1) \end{cases}$$

d cắt (C) tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{9}{4} \\ k \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó, d cắt (C) tại $M(-1; 2), N(x_1; y_1), P(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Theo định lý Vi - ét:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 1 \\ P = x_1 x_2 = -k - 2 \end{cases}$$

Tiếp tuyến tại N và P vuông góc với nhau $\Leftrightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow (3x_1^2 - 3)(3x_2^2 - 3) = -1$

$$\Leftrightarrow 9x_1^2 x_2^2 - 9(x_1^2 + x_2^2) + 9 = -1 \Leftrightarrow 9P^2 + 18P - 9S^2 + 9 = -1$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 + 18k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy tích các phân tử trong S là $\frac{1}{9}$.

Câu 25.

Giả sử $A\left(a; \frac{2a}{a+2}\right)$. Ta có $y' = \frac{4}{(x+2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A: $\frac{4}{(a+2)^2}x - y - \frac{4a}{(a+2)^2} + \frac{2a}{a+2} = 0 \Rightarrow d(A, d) = \frac{|8(a+2)|}{\sqrt{(a+2)^4 + 16}}$

Do tính đối xứng nên A, B thuộc hai nhánh khác nhau, không mất tính tổng quát giả sử $x_A = a > -2$

Đặt $t = a + 2 \Rightarrow t > 0$. Khi đó $d(A, d) = \frac{8t}{\sqrt{t^4 + 16}}$

Xét $f(t) = \frac{8t}{\sqrt{t^4 + 16}} (t > 0)$, từ bảng biến thiên ta có $\max_{t>0} f(t) = f(2)$

Vậy khoảng cách từ I đến tiếp tuyến tại A lớn nhất khi $a = 0$ hay $A(0; 0)$

Do tính đối xứng nên $B(-4; 4)$.

Vậy $AB = 4\sqrt{2}$.

Câu 26.

Đặt $h(x) = \frac{f(x)+3}{g(x)+3}$. Giả sử $f'(1) = g'(1) = h'(1) = k$.

Ta có:
$$h'(x) = \frac{f'(x)[g(x)+3] - g'(x)[f(x)+3]}{[g(x)+3]^2} \Rightarrow k = \frac{k[g(1)-f(1)]}{[g(1)+3]^2} \Rightarrow \frac{[g(1)-f(1)]}{[g(1)+3]^2} = 1$$

$$\Rightarrow g^2(1) + 5g(1) + f(1) + 9 = 0. \text{ Tồn tại } g(1) \Rightarrow \Delta = -11 - 4f(1) \geq 0 \Rightarrow f(1) \leq -\frac{11}{4}$$

Câu 27.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm x_0 là $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{1}{x_0 - 1}$

Tọa độ giao điểm của tiếp tuyến với các trục tọa độ là $A(2x_0 - 1; 0), B\left(0; \frac{2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2}\right)$

Suy ra $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x_0 - 1)^2}{(x_0 - 1)^2} = 2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}; -4\right)$

Câu 28.

$d: 2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow k_d = 2, y = (2m - 1)x^4 - m + \frac{5}{4} \Rightarrow y' = 4(2m - 1)x^3$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = (2m - 1)x^4 - m + \frac{5}{4}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ là

$k_u = y'(-1) = 4(2m - 1)(-1)^3 = -4(2m - 1)$

Ta có $k_u \cdot k_d = -1 \Leftrightarrow -8(2m - 1) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{16}$

Câu 29.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Ta có $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2}$

Tiếp tuyến $d: y = kx + m$ cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B nên $m \neq 0, k \neq 0$

Do $A \in Ox$ nên $A\left(-\frac{m}{k}; 0\right)$, $B \in Oy$ nên $B(0; m)$.

Do tam giác ΔOAB cân tại gốc tọa độ O nên $OA = OB \Leftrightarrow \left|\frac{m}{k}\right| = |m| \Leftrightarrow m^2 \left(\frac{1}{k^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 1 \end{cases}$

Do $k = -\frac{1}{(2x_0+3)^2} < 0$ nên $k = -1$. Suy ra: $\frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Leftrightarrow (2x_0+3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \end{cases}$

+ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M_1(-1; 1)$ là: $y = -(x+1) + 1 \Leftrightarrow y = -x$ (loại)

+ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M_2(-2; 0)$ là: $y = -(x+2) \Leftrightarrow y = -x - 2$

Khi đó: $k + m = -1 - 2 = -3$

Câu 30.

Phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại A là $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 3x + 4 \Rightarrow \begin{cases} f'(2) = 3 \\ f(2) = 10 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại B là

$$y = f'(2) \cdot f'(f(2))(x-2) + f(f(2)) = f'(2) \cdot f'(10)(x-2) + f(10) = 6x + 13 \Rightarrow \begin{cases} f'(10) = 2 \\ f(10) = 25 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại C là $y = 12 \cdot f'(10) \cdot (x-2) + f(10) = 24 \cdot (x-2) + 25 = 24x - 23$.

Câu 31.

Gọi $M(x_0; \sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3})$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có dạng là: $y - \sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3} = \frac{x_0 - 1}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3}}(x - x_0)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x_0 - 1}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3}} \cdot x + \frac{3 - x_0}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3}}$$

Vì tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A(1; a)$ nên ta có:

$$a = \frac{x_0 - 1}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3}} + \frac{3 - x_0}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3}} = \frac{2}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3}} \Leftrightarrow a\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2(x_0^2 - 2x_0 + 3) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2x_0^2 - 2ax_0 + 3a^2 - 4 = 0(*) \end{cases}$$

Vì qua A kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C) nên hệ phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = -3a^4 + 5a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = -3a^2 + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{\sqrt{15}}{3} < a < \frac{\sqrt{15}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $a = 1$.

Câu 32.

Nhận xét: hàm số đã cho là hàm số chẵn và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Việc chứng minh hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, ta chỉ cần chứng minh hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Thật vậy, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3 - 3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2|x| - 3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x|x| - 3x) = 0 \text{ nên hàm số có đạo hàm tại } x = 0$$

Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị (C) của nó đối xứng qua Oy. Do đó từ điểm A trên trục Oy nếu kẻ được một tiếp tuyến d đến (C) thì ảnh của d qua phép đối xứng trục Oy cũng là một tiếp tuyến của (C). Vậy để qua điểm A trên trục Oy có thể kẻ đến (C) đúng ba tiếp tuyến thì điều kiện cần và đủ là có

một tiếp tuyến vuông góc với trục tung và một tiếp tuyến với nhánh phải của đồ thị (C), tức là phần đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, với $x \geq 0$.

Gọi $M(0; m)$ thuộc Oy và (Δ) là tiếp tuyến qua $M(0; m)$ có hệ số góc k. Ta có: $(\Delta): y = kx + m$

$$\text{Điều kiện tiếp xúc là } \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = kx + m \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } x^3 - 3x^2 + 1 = x(3x^2 - 6x) + m \Leftrightarrow m = -2x^3 + 3x^2 + 1 (*)$$

Yêu cầu đề bài tương đương phương trình (*) có đúng một nghiệm $x = 0$ và một nghiệm $x > 0$.

Phương trình (*) có nghiệm $x = 0$ nên $m = 1$.

$$\text{Thử lại, với } m = 1 \text{ thì } (*) \text{ trở thành: } -2x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ (đúng).}$$

Vậy $m = 1$

Câu 33.

Gọi $A(x_1; x_1^3 - 3x_1^2 + 1)$, $B(x_2; x_2^3 - 3x_2^2 + 1)$ với $(x_1 \neq x_2)$

Do tiếp tuyến tại A, B song song với nhau nên chúng có cùng hệ số góc k.

Khi đó phương trình $3x^2 - 6x - k = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3k > 0 \Leftrightarrow k > -3 (*)$

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + [x_2^3 - x_1^3 - 3(x_2^2 - x_1^2)]^2 = (x_2 - x_1)^2 \left[1 + (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2)^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow 32 = [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] \left[1 + [(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 3(x_1 + x_2)]^2 \right] (1)$$

Với $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1x_2 = -\frac{k}{3}$ nên $(1) \Leftrightarrow 32 = \frac{4(k+3)}{3} \cdot \frac{9+(k-6)^2}{9} \Leftrightarrow (k-9)(k^2+9) = 0 \Rightarrow k = 9$ (thỏa mãn (*))

$$\text{Khi đó } 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow A(-1; -3) \\ x = 3 \Rightarrow B(3; 1) \end{cases} \Rightarrow AB: x - y - 2 = 0$$

Do đó đường thẳng AB đi qua điểm $N(4; 2)$.

Câu 34.

Phương trình tiếp tuyến của elip tại điểm $(x_0; y_0)$ là $y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0 (1)$

Từ phương trình elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, đạo hàm hai vế ta được $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$

$$\Rightarrow y'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (*)$$

Khi đó thế (*) vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến như sau:

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0) + y_0 \Rightarrow a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - b^2 x \cdot x_0 = a^2 y \cdot y_0 \Rightarrow \frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

Do $(x_0; y_0)$ thuộc elip nên $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

Câu 35.

Để thấy đồ thị hàm số (P) có hệ số $a = 1 > 0$ và (P) cắt Ox tại các điểm có hoành độ

$$x_1 = m - 1 < m + 2 = x_2$$

Do đó yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow 3 \leq m - 1 \Leftrightarrow m \geq 4$.

Câu 36.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến tại M: $y = \frac{-3}{(2x_0 - 1)^2} (x - x_0) + y_0$

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành và trục tung $\Rightarrow y_B = \frac{2x_0^2 + 4x_0 - 1}{(2x_0 - 1)^2}$

Từ đó trọng tâm G của $\triangle OAB$ có tung độ $y_G = \frac{y_B}{3} = \frac{2x_0^2 + 4x_0 - 1}{3(2x_0 - 1)^2}$

Vì $G \in d$ nên $\frac{2x_0^2 + 4x_0 - 1}{3(2x_0 - 1)^2} = 2m - 1$

Mặt khác: $\frac{2x_0^2 + 4x_0 - 1}{(2x_0 - 1)^2} = \frac{6x_0^2 - (2x_0 - 1)^2}{(2x_0 - 1)^2} = \frac{6x_0^2}{(2x_0 - 1)^2} - 1 \geq -1$

Do đó để tồn tại ít nhất một điểm M thỏa mãn bài toán thì $2m - 1 \geq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là $\frac{1}{3}$

Câu 37.

Ta có $M(0; 1 - m)$ là giao điểm của (C_m) với trục tung $y' = 3x^2 - m \Rightarrow y'(0) = -m$

Phương trình tiếp tuyến với (C_m) tại điểm M là $y = -mx + 1 - m$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến này với trục hoành và trục tung, ta có tọa độ $A\left(\frac{1-m}{m}; 0\right)$ và

$B(0; 1 - m)$.

Nếu $m = 0$ thì tiếp tuyến song song với Ox nên loại khả năng này.

Nếu $m \neq 0$ ta có:

$$S_{OAB} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OA \cdot OB = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| \frac{1-m}{m} \right| |1-m| = 8 \Leftrightarrow \frac{(1-m)^2}{|m|} = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \pm 4\sqrt{5} \\ m = -7 \pm 4\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy có 4 giá trị cần tìm.

Câu 38.

Giả sử tiếp tuyến (d) của (C) tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA = 4OB$

Do $\triangle OAB$ vuông tại O nên $\tan A = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của (d) bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$

$$\text{Hệ số góc của (d) là } y'(x_0) = -\frac{1}{(x_0-1)^2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \left(y_0 = \frac{3}{2} \right) \\ x_0 = 3 \left(y_0 = \frac{5}{2} \right) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó có 2 tiếp tuyến thỏa mãn là: } \begin{cases} y = -\frac{1}{4}(x+1) + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{4}(x-3) + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4} \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \end{cases}$$

Câu 39.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

Từ giả thiết ta có: $f^2(1+3x) = 9x - f^3(1-x)(1)$

$$\text{Với } x = 0 \text{ thay vào (1) ta được: } f^2(1) = -f^3(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1) ta được $6f(1+3x) \cdot f'(1+3x) = 9 + 3f^2(1-x) \cdot f'(1-x)$ (2)

Với $x = 0$ thay vào (2) ta được: $6f(1) \cdot f'(1) = 9 + 3f^2(1) \cdot f'(1)$ (3)

Trường hợp 1: Với $f(1) = 0$ thay vào (3) ta được: $9 = 0$ (vô lý).

Trường hợp 2: Với $f(1) = -1$ thay vào (3) ta được: $-6f'(1) = 9 + 3f'(1) \Leftrightarrow f'(1) = -1$

Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -(x-1) - 1 = -x$$

Vậy $y = -x$

Câu 40.

Ta có $M(a; b) \in (C) \Rightarrow b = \frac{2a-1}{a-1}$. Lại có $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$ nên tiếp tuyến d tại M có hệ số góc là

$$k = \frac{-1}{(a-1)^2}.$$

Đường thẳng IM có một vector chỉ phương là $\overrightarrow{IM} = \left(a-1; \frac{1}{a-1}\right)$ nên có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (-1; (a-1)^2)$

Do đó đường thẳng IM có hệ số góc là $k' = \frac{-(-1)}{(a-1)^2} = \frac{1}{(a-1)^2}$

Để $d \perp IM$ thì $k.k' = -1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(a-1)^2} \cdot \frac{1}{(a-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (a-1)^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=1 \\ a-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=0 \end{cases}$

Mà $a > 0$, nên $a = 2$ và $b = 3$. Do đó $a + b = 5$

Câu 41.

Ta có $y' = x^2 + 2mx + 2m - 3$

Đường thẳng $(d): x + 2y + 6 = 0 \Rightarrow (d): y = -\frac{1}{2}x - 3$ có hệ số góc $k = -\frac{1}{2}$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$. Tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với d nên $y'_{(x_0)} \cdot k = -1 \Rightarrow y'_{(x_0)} = 2$

$\Rightarrow x_0^2 + 2mx_0 + 2m - 3 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 + 2mx_0 + 2m - 5 = 0(*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 2m - 5 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$.

Câu 42.

Theo đề bài ta có $k_1 = k_2 = f'(2) = g'(2) \cdot k_3 = \frac{f'(2)g(2) - g'(2)f(2)}{g^2(2)}$

Theo đề bài ta có $k_1 = k_2 = 2k_3 \neq 0$ nên ta có phương trình

$$\frac{f'(2)[g(2) - f(2)]}{g^2(2)} = \frac{1}{2}f'(2) \Leftrightarrow g^2(2) - 2g(2) + 2f(2) = 0$$

Do $g(2)$ là một giá trị thuộc tập giá trị của hàm số nên phương trình $g^2(2) - 2g(2) + 2f(2) = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2f(2) \geq 0 \Leftrightarrow f(2) \leq \frac{1}{2}$

Câu 43.

Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$. Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của $(C): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên tiếp tuyến phải vuông góc với một trong hai đường phân giác $y = \pm x$, do đó hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1 hay $y'(x_0) = \pm 1$.

Mà $y' < 0, \forall x \neq 1$ nên ta có

$$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -1, x_0 = 3$$

- $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$
- $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$

Câu 44.

Ta có $h'(x) = -f'(2-x)$ và $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2-x) = 0$

$$\Leftrightarrow (12-x)(1+x)g(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = -1 \end{cases} \quad (\forall g(x) < 0, \forall x)$$

Từ đó ta có bảng xét dấu của $h'(x)$

x	$-\infty$	-1	12	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Chú ý rằng đạo hàm của hàm số $h(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị tại đó và chính bằng $\tan \alpha_0$.

Câu 45.

Vì $M \in d: 2x - y + 1 = 0$ nên $M(m; 2m + 1)$.

Tiếp tuyến của (C) qua M có phương trình dạng $y = k(x - m) + 2m + 1$.

$$\text{Từ điểm M kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C) khi và chỉ khi hệ } \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} = k(x-m) + 2m+1 \\ \frac{-4}{(x-1)^2} = k \end{cases} \quad \text{có}$$

nghiệm duy nhất.

Thay (2) vào (1), ta được:

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{-4}{(x-1)^2} (x-m) + 2m+1 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = -4(x-m) + (2m+1)(x-1)^2, (x \neq 1)$$

Lần lượt thử từng phương án:

Với $m = -1$ thì phương trình trên trở thành $2x^2 + 4x + 2 = 0$ có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

$$\text{Vậy } m = -1 \Rightarrow M(-1; -1)$$

Câu 46.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng: $y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1}$

$$\bullet \quad \Delta \cap Ox = A: \begin{cases} y=0 \\ \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1} = 0 \end{cases}$$

Suy ra $A\left(\frac{2x_0^2+2x_0-1}{3}; 0\right)$

$$\bullet \quad \Delta \cap Oy = B: \begin{cases} x=0 \\ y = \frac{3x_0}{(x_0-1)^2} + \frac{2x_0+1}{x_0-1} \end{cases}$$

Suy ra: $B\left(0; \frac{2x_0^2+2x_0-1}{(x_0-1)^2}\right)$

Diện tích tam giác OAB: $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{6}\left(\frac{2x_0^2+2x_0-1}{x_0-1}\right)^2$

Suy ra $S_{OAB} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \left(\frac{2x_0^2+2x_0-1}{x_0-1}\right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2+2x_0-1 = x_0-1 \\ 2x_0^2+2x_0-1 = -x_0+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2+x_0=0 \\ 2x_0^2+3x_0-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0, x_0=-\frac{1}{2} \\ x_0=\frac{1}{2}, x_0=-2 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được các tiếp tuyến là: $y = -3x + 1, y = -3x + 11, y = -12x + 2, y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

Câu 47.

Ta có: $g'(x) = f(2x-1) + 2x \cdot f'(2x-1) \Rightarrow g'(1) = f(1) + 2f'(1)$

d_1 có hệ số góc là $f'(1)$

d_2 có hệ số góc là $g'(1) = f(1) + 2f'(1)$

Mà $d_1 \perp d_2 \Rightarrow f'(1) \cdot g'(1) = -1 \Leftrightarrow f'(1) \cdot [f(1) + 2f'(1)] = -1 \Leftrightarrow 2f'^2(1) - f(1) \cdot f'(1) + 1 = 0$

Để tồn tại $f'(1) \Leftrightarrow \Delta = f^2(1) - 8 \geq 0 \Leftrightarrow |f(1)| \geq 2\sqrt{2}$

Câu 48.

Ta có: $k_1 = f'(2), k_2 = g'(2); k_3 = \frac{f'(2) \cdot g(2) - f(2) \cdot g'(2)}{g^2(2)} = \frac{k_1 \cdot g(2) - k_2 \cdot f(2)}{g^2(2)}$

Mà $k_1 = k_2 = 2k_3 \neq 0$ nên ta có:

$$k_3 = \frac{2k_3 \cdot g(2) - 2k_3 \cdot f(2)}{g^2(2)} \Leftrightarrow f(2) = -\frac{1}{2}g^2(2) + g(2) = -\frac{1}{2} \cdot [g(2) - 1]^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Câu 49.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(m+1)x$

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và d là $x^3 - (m+1)x^2 + 2m + 1 = x + m + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - (m+1)x^2 - x + m = 0(*)$$

Gọi $\begin{cases} A(a; a+m+1) \\ B(b; b+m+1) \\ C(c; c+m+1) \end{cases}$ là tọa độ giao điểm giữa (C), d trong đó a, b, c đôi một khác nhau.

Theo đề bài ta có $f'(a) + f'(b) + f'(c) = 19 \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(m+1)(a+b+c) = 19$

$$\Leftrightarrow 3[(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)] - 2(m+1)(a+b+c) = 19$$

Mặt khác từ (*) $\Rightarrow \begin{cases} a+b+c = m+1 \\ ab+bc+ca = -1 \end{cases}$

Do đó ta có $3[(m+1)^2 + 2] - 2(m+1)^2 = 19 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 13 \Rightarrow m = \pm\sqrt{13} - 1$

Vậy tổng giá trị $m_1 + m_2 = -2$.

Câu 50.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx - m$. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số

góc là $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 2mx_0 - m = 3\left(x_0 - \frac{m}{3}\right)^2 - \left(\frac{m^2}{3} + m\right) \geq -\left(\frac{m^2 + 3m}{3}\right)$

Để mọi đường thẳng tiếp xúc với (C) đều có hệ số góc dương thì:

$$-\left(\frac{m^2 + 3m}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m^2 + 3m}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 0$$

$$\Rightarrow \text{Tập các giá trị nguyên của } m \text{ là: } T = \{-2; -1\}.$$

Vậy tổng các phần tử của T là: -3.

Câu 51.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ và trục hoành là

$$\frac{x^2 - 2mx + m}{x + m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx + m = 0(*) \\ x \neq -m \end{cases}$$

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm

$$\text{phân biệt khác } -m \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m > 0 \\ 3m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \\ m \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của đồ thị (C) với trục hoành thì $y_0 = x_0^2 - 2mx_0 + m = 0$ và hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại M là:

$$k = y'(x_0) = \frac{(2x_0 - 2m)(x_0 - 1) - (x_0^2 - 2mx_0 + m)}{(x_0 + m)^2} = \frac{2x_0 - 2m}{x_0 + m}$$

Vậy hệ số góc của hai tiếp tuyến với (C) tại hai giao điểm với trục hoành là $k_1 = \frac{2x_1 - 2m}{x_1 + m}, k_2 = \frac{2x_2 - 2m}{x_2 + m}$

$$\text{Hai tiếp tuyến này vuông góc} \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{2x_1 - 2m}{x_1 + m} \right) \left(\frac{2x_2 - 2m}{x_2 + m} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 4[x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2] = -[x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2] (**)$$

$$\text{Ta lại có } \begin{cases} x_1x_2 = m \\ x_1 + x_2 = 2m \end{cases}, \text{ do đó } (**) \Leftrightarrow m^2 - 5m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 5 \end{cases}. \text{ Nhận } m = 5.$$

Câu 52.

Do $y = f(x)$ có đồ thị cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 nên

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4), a \neq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= a(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + a(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \\ &\quad + a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \end{aligned}$$

$$\text{Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A là } k_1 = f'(x_1) = a(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \quad (1)$$

$$\text{Ta có } y' = f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \Leftrightarrow f'(x_1) = 4ax_1^3 + 3bx_1^2 + 2cx_1 + d \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra } k_1 = f'(x_1) = 4ax_1^3 + 3bx_1^2 + 2cx_1 + d$$

$$\text{Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị (C) tại B là } k_2 = f'(x_2) = a(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) = 2ad^3$$

Do hai tiếp tuyến của (C) tại A, B vuông góc với nhau nên

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow -12(ad^3)^2 = -1 \Leftrightarrow a^2d^6 = \frac{1}{12}$$

$$\text{Ta có: } f'(x_3) = a(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) = -2ad^3 \Rightarrow [f'(x_3)]^2 = 4a^2d^6 = \frac{1}{3}$$

$$f'(x_4) = a(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) = 6ad^3 \Rightarrow [f'(x_4)]^2 = 36a^2d^6 = 3$$

$$\text{Vậy } S = 3[f'(x_3)]^2 + [f'(x_4)]^2 = 4$$

Câu 53.

$$\text{Ta có: } [f(1+2x)]^2 = x - [f(1-x)]^3 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 4[f(1+2x)] \cdot f'(1+2x) = 1 + 3[f(1-x)]^2 \cdot f'(1-x) \quad (2)$$

Cho $x = 0$

$$(1) \Rightarrow [f(1)]^2 + [f(1)]^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow 4 \cdot f(1) \cdot f'(1) = 1 + 3[f(1)]^2 \cdot f'(1)$$

Ta thấy $f(1) = 0$ không thỏa mãn, với $f(1) = -1 \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{7}$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến là: } y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$$

Câu 54.

$$\text{Từ giả thiết } 2f(2x) + f(1-2x) = 12x^2, \forall x \in \mathbb{R} (*)$$

$$\text{Chọn } x = 0, x = \frac{1}{2} \text{ ta được } \begin{cases} 2f(0) + f(1) = 0 \\ 2f(1) + f(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$\text{Lấy đạo hàm hai vế } (*) \text{ ta được } 4 \cdot f'(2x) - 2 \cdot f'(1-2x) = 24x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Chọn } x = 0, x = \frac{1}{2} \text{ ta được } \begin{cases} 4f'(0) - 2f'(1) = 0 \\ 4f'(1) - 2f'(0) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0) = 2 \\ f'(1) = 4 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là } y = 4(x-1) + 2 = 4x - 2$$

Câu 55.

$$\text{Từ giả thiết } [f(1+2x)]^2 = x - [f(1-3x)]^3, \forall x \in \mathbb{R} (*)$$

$$\text{Chọn } x = 0 \text{ ta được } f^2(1) = -f^3(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

Lấy đạo hàm hai vế $(*)$ ta được

$$2 \cdot f(1+2x) \cdot 2 \cdot f'(1+2x) = 1 - 3 \cdot f^2(1-3x) \cdot -3 \cdot f'(1-3x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Chọn } x = 0 \text{ ta được } 4 \cdot f(1) \cdot f'(1) = 1 + 9f^2(1) \cdot f'(1).$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow \text{ vô lý.}$$

$$\text{Suy ra } f(1) = -1 \text{ và } f'(1) = -\frac{1}{13}.$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -\frac{1}{13}(x-1) - 1 = \frac{-x}{13} - \frac{12}{13}$

Câu 56.

Từ $[f(-x+2)]^2 + [f(x+2)]^3 = 10x$ (*), cho $x=0$ ta có $[f(2)]^2 + [f(2)]^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=0 \\ f(2)=-1 \end{cases}$

Đạo hàm hai vế của (*) ta được $-2f(-x+2).f'(-x+2) + 3[f(x+2)]^2.f'(x+2) = 10$

Cho $x=0$ ta được $-2f(2).f'(2) + 3[f(2)]^2.f'(2) = 10$

$\Leftrightarrow f(2).f'(2).[3f(2)-2] = 10$ (**).

Nếu $f(2)=0$ thì (**) vô lý.

Nếu $f(2)=-1$, khi đó (**) trở thành $-f'(2).[-3-2] = 10 \Leftrightarrow f'(2)=2$

Phương trình tiếp tuyến $y = 2(x-2) - 1 \Leftrightarrow y = 2x - 5$.

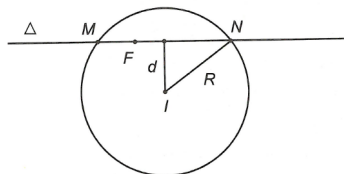
Câu 57.

Đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ có tâm $I(0;1)$, bán kính $R=2$.

Ta có $A(1;1-m); y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y'(1) = 4 - 4m$

Suy ra phương trình $\Delta: y = (4 - 4m)(x-1) + 1 - m$

Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm cố định $F\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ và điểm F nằm trong đường tròn (γ)



Giả sử Δ cắt (γ) tại M, N. Thế thì ta có: $MN = 2\sqrt{R^2 - d^2(I; \Delta)} = 2\sqrt{4 - d^2(I; \Delta)}$

Do đó MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I; \Delta)$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = IF \Rightarrow \Delta \perp IF$.

Khi đó đường Δ có 1 vector chỉ phương $\vec{u} \perp \overrightarrow{IF} = \left(\frac{3}{4}; -1\right); \vec{u} = (1; 4 - 4m)$ nên ta có:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{3}{4} - (4 - 4m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{16}.$$

Câu 58.

Từ giả thiết $2f(2x) + f(1-2x) = 4x^3 - x^2, \forall x \in \mathbb{R} (*)$.

Chọn $x=0, x=\frac{1}{2}$ ta được $\begin{cases} 2f(0)+f(1)=0 \\ 2f(1)+f(0)=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)=-\frac{1}{12} \\ f(1)=\frac{1}{6} \end{cases}$

Lấy đạo hàm hai vế (*) ta được $4.f'(2x)-2.f'(1-2x)=12x^2-2x, \forall x \in \mathbb{R}$

Chọn $x=0, x=\frac{1}{2}$ ta được $\begin{cases} 4f'(0)-2f'(1)=0 \\ 4f'(1)-2f'(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(0)=\frac{1}{3} \\ f'(1)=\frac{2}{3} \end{cases}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 và bằng 0 lần

lượt là $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$ và $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}$.

Do đó $a=\frac{2}{3}; b=\frac{-1}{2}; a_1=\frac{1}{3}; b_1=\frac{-1}{12}$.

Vậy $\frac{2a-5b}{3b_1+2a_1}=\frac{46}{5}$.