

ĐẠO HÀM

BÀI GIẢNG ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Hiểu khái niệm đạo hàm, đạo hàm bên trái, đạo hàm bên phải, đạo hàm trên khoảng, trên đoạn.
- + Nắm được quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số.
- + Biết cách tìm hệ số góc của tiếp tuyến và viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm.
- + Trình bày được ứng dụng đạo hàm vào giải bài toán vật lý.

❖ Kỹ năng

- + Tính được đạo hàm của hàm số tại một điểm, trên một khoảng bằng cách dùng định nghĩa.
- + Biết cách tìm hệ số góc của tiếp tuyến và viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm.
- + Vận dụng được đạo hàm vào giải bài toán vật lý.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó

được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 và kí hiệu là $f'(x_0)$ có nghĩa là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Trong đó

$\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của đối số x tại x_0 .

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số.

2. Đạo hàm bên trái, bên phải

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Hệ quả: Hàm $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi tồn tại $f'(x_0^+)$

và $f'(x_0^-)$, đồng thời $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

3. Đạo hàm trên khoảng, trên đoạn

- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a; b)$.

- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[a; b]$ nếu $f(x)$

+ Có đạo hàm tại mọi $x \in (a; b)$;

+ Có đạo hàm trái $f'(b^-)$;

+ Có đạo hàm phải $f'(a^+)$.

4. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại x_0 .

5. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp

Chú ý:

+ Nếu $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0 .

tuyến M_0T của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

+ Nếu $y = f(x)$ liên tục tại

Phương trình tiếp tuyến

x_0 có thể không có đạo hàm tại

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 .

$M_0(x_0; f(x_0))$ là $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ trong đó $y_0 = f(x_0)$.

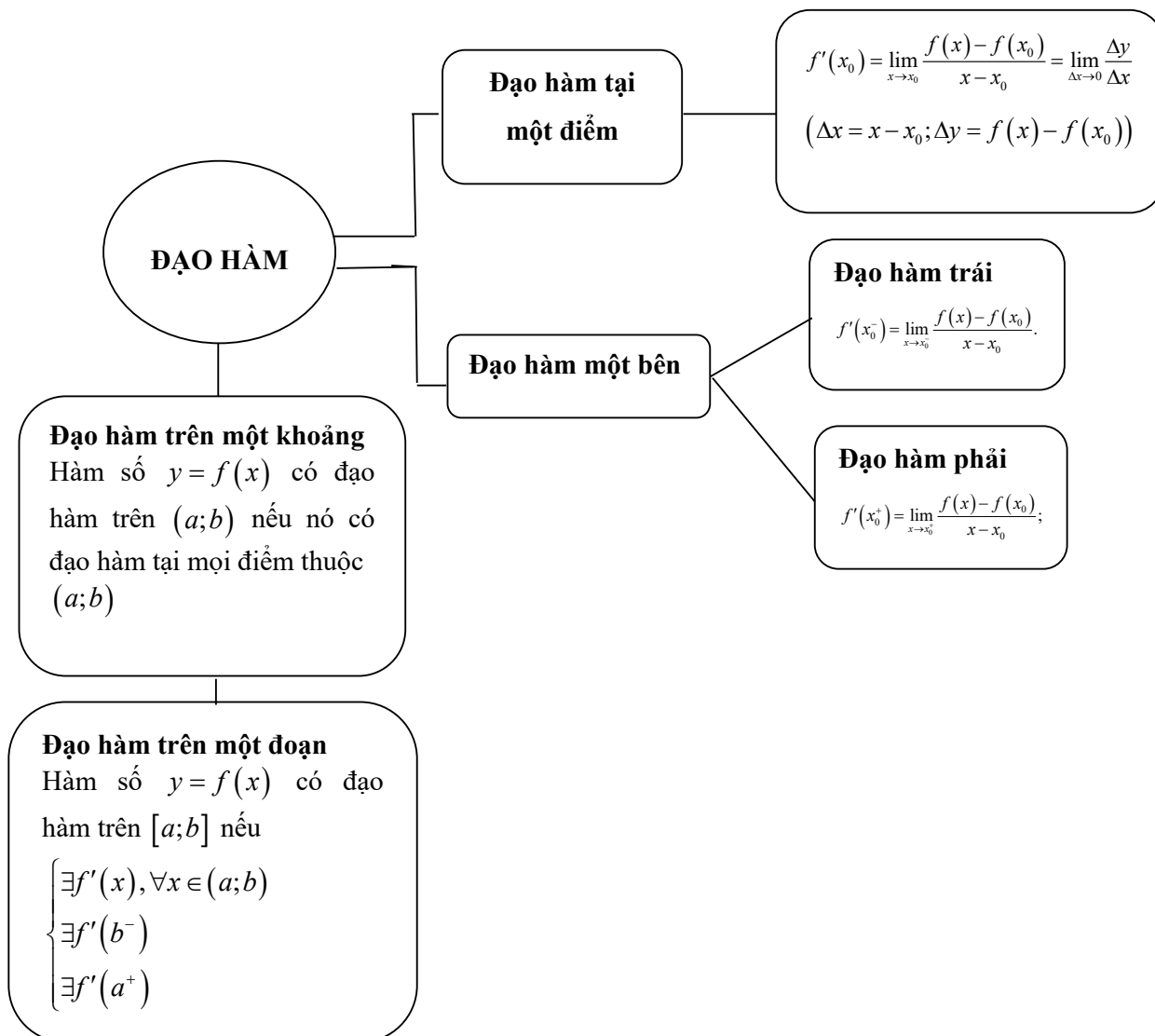
6. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

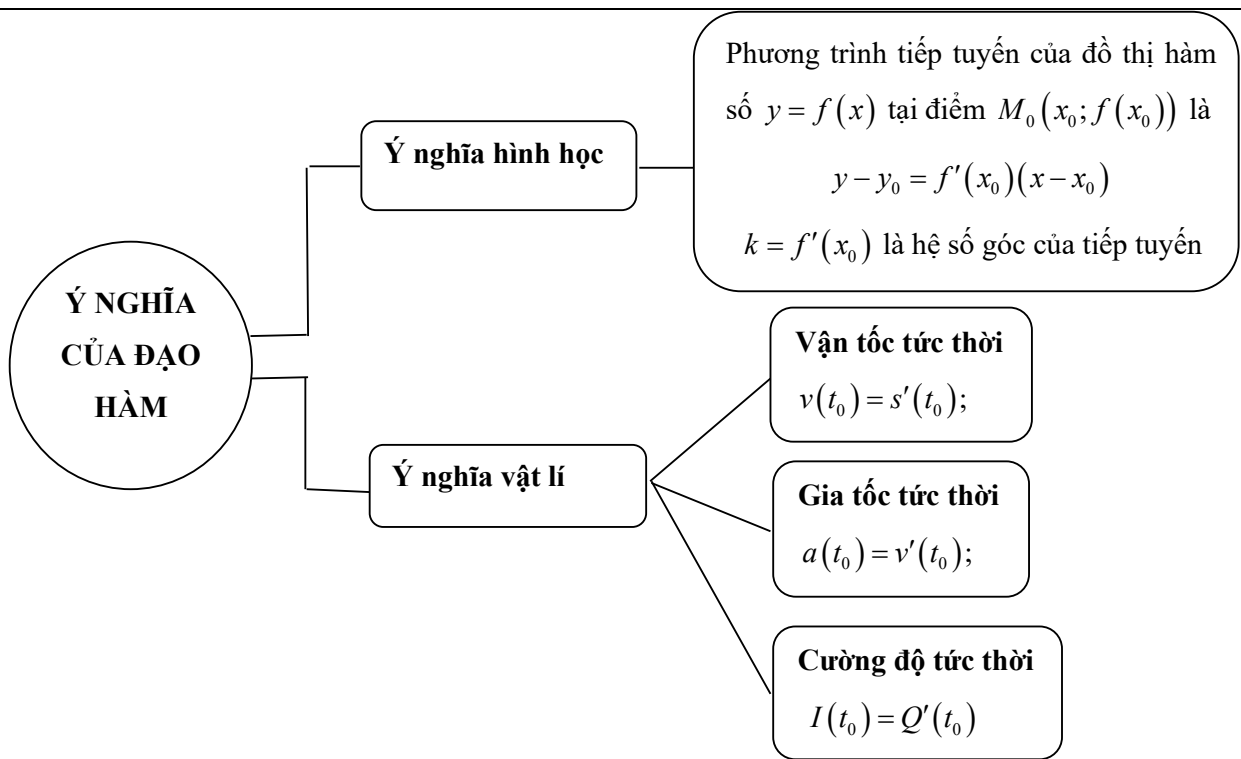
+ Vận tốc tức thời : $v(t_0) = s'(t_0)$;

+ Gia tốc: $a(t_0) = v'(t_0) = (s'(t_0))'$;

+ Cường độ dòng điện tức thời: $I(t_0) = Q'(t_0)$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA





II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Dùng định nghĩa tính đạo hàm

Bài toán 1. Dùng định nghĩa tính đạo hàm hàm số tại một điểm

Phương pháp giải

Bước 1: Giả sử Δx là số gia của đối số x tại điểm x_0 . Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Bước 2: Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3: Tìm $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ví dụ. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số $y = 2x^2 + 3$ tại $x_0 = 2$.

Hướng dẫn giải

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 2$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(2 + \Delta x) - f(2) = 2(2 + \Delta x)^2 + 3 - (2 \cdot 2^2 + 3) \\ &= 2\Delta x(\Delta x + 4). \end{aligned}$$

$$\text{Tỉ số } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x(\Delta x + 4)}{\Delta x} = 2\Delta x + 8.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2\Delta x + 8) = 8.$$

Vậy $f'(2) = 8$.

+ Nếu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ tồn tại hữu hạn thì tại x_0 hàm

số có đạo hàm $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$;

+ Nếu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ không tồn tại hữu hạn thì tại

x_0 hàm số không có đạo hàm.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại $x_0 = 3$.

Hướng dẫn giải

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 3$.

Ta có: $\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = \frac{2(3 + \Delta x) - 1}{3 + \Delta x + 1} - \frac{5}{4} = \frac{5 + 2\Delta x}{4 + \Delta x} - \frac{5}{4} = \frac{3\Delta x}{4(4 + \Delta x)}$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x \cdot 4(4 + \Delta x)} = \frac{3}{4(4 + \Delta x)}.$$

Do đó $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x \cdot 4(4 + \Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3}{4(4 + \Delta x)} = \frac{3}{16}$.

Vậy $f'(3) = \frac{3}{16}$.

Ví dụ 2. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2x-1}$ tại $x_0 = 1$.

Hướng dẫn giải

Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 1$.

Ta có: $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = \sqrt{2(1 + \Delta x) - 1} - 1 = \frac{2\Delta x}{\sqrt{2\Delta x + 1} + 1}$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x(\sqrt{2\Delta x + 1} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{2\Delta x + 1} + 1};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2\Delta x + 1} + 1} = 1.$$

Vậy $f'(1) = 1$.

Ví dụ 3. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử Δx là số gia của đối số $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Ta có: $\Delta y = f\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \sin\frac{\pi}{3} = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

$$\text{Vì } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \text{ nên } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng có đạo hàm tại $x = 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Suy ra hàm số gián đoạn tại $x = 0$ nên không có đạo hàm tại đó.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2+\Delta x) = 2.$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = 2$ và $f'(2) = 2$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + |x+1|}{x-1}$ liên tục tại $x = -1$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

Hướng dẫn giải

Vì $f(x)$ là hàm số sơ cấp xác định tại $x = -1$ nên nó liên tục tại đó.

$$\text{Ta có: } f'((-1)^+) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x}{x-1} = 1;$$

$$f'((-1)^-) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} 2 = 2.$$

Do đó $f' \left[(-1)^+ \right] \neq f' \left[(-1)^- \right]$ nên $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = -1$.

Ví dụ 6. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ như hình vẽ.

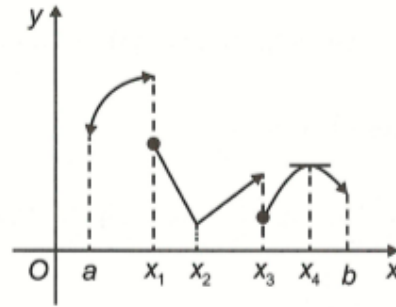
Dựa vào hình vẽ hãy cho biết tại mỗi điểm

x_1, x_2, x_3, x_4 .

a, Hàm số có liên tục không?

b, Hàm số có đạo hàm không?

Tính đạo hàm nếu có.



Hướng dẫn giải

a, Hàm số gián đoạn tại các điểm x_1, x_3 vì đồ thị bị đứt tại các điểm đó. Hàm số liên tục tại x_2, x_4 vì đồ thị là đường liên nét khi đi qua các điểm đó.

b, Tại các điểm x_1, x_3 hàm số không có đạo hàm do hàm số gián đoạn tại các điểm x_1, x_3 .

Hàm số không có đạo hàm tại x_2 vì đồ thị bị gãy (không có tiếp tuyến tại đó).

Hàm số có đạo hàm tại x_4 và $f'(x_4) = 0$ vì tại x_4 đồ thị hàm số có tiếp tuyến và tiếp tuyến song song với trục hoành (hệ số góc của tiếp tuyến bằng 0).

Bài toán 2. Dùng định nghĩa tìm đạo hàm trên một khoảng

Phương pháp giải

Bước 1: Giả sử Δx là số gia của đối số x tại x_0 .

Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Bước 2: Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3: Tìm $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên

$(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trên $(a; b)$.

Ví dụ. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số $y = x^2$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

Hướng dẫn giải

Giả sử Δx là số gia của đối số x .

Ta có:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 \\ &= 2\Delta x \cdot x + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Tỉ số } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x \cdot x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$.
 $[a; b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm
 thuộc $(a; b)$ đồng thời tồn tại đạo hàm
 trái $f'(b^-)$ và đạo hàm phải $f'(a^+)$.
 Vậy $f'(x) = 2x$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ trên các

khoảng $(-\infty; 1)$ và $(-1; +\infty)$?

Hướng dẫn giải

Giả sử Δx là số gia của đối số x .

$$\text{Ta có } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{x + \Delta x}{x + \Delta x - 1} - \frac{x}{x - 1} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot (x + \Delta x - 1)(x - 1)} = \frac{-1}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + \Delta x - 1)(x - 1)} = \frac{-1}{(x - 1)^2}.$$

$$\text{Vậy } f'(x) = \frac{-1}{(x - 1)^2}.$$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

Hướng dẫn giải

Giả sử Δx là số gia của đối số x .

$$\text{Ta có: } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = - \frac{\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} - \frac{\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

$$\text{Vậy } f'(x) = -\sin x.$$

Bài toán 3. Tìm điều kiện của tham số để hàm số có đạo hàm

Phương pháp giải

Sử dụng tính chất

Hàm $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi tồn tại $f'(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ đồng thời $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

Ví dụ. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \neq 1 \\ 2m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2; f(1) = 2m$.

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ thì $f(x)$ phải liên tục tại $x = 1$, suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1.$$

Thay $m = 1$ vào hàm số $f(x)$ thỏa mãn có đạo hàm $x = 1$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{khi } x \geq 2 \\ ax + b & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$

Hướng dẫn giải

Ta

có

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3x) = -2; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = 2a + b$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 2$ thì hàm số liên tục tại $x = 2$.

Do đó $2a + b = -2 \Rightarrow b = -2a - 2$. Ta lại có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax + b - (-2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax + b + 2}{x - 2}.$$

$$\text{Do } b = -2a - 2 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax + b + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax - 2a - 2 + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ax - 2a}{x - 2} = a$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 2$ thì

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2a - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0 \\ -\sin x, & x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sin x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Suy ra hàm số gián đoạn tại $x = 0$ nên không có đạo hàm tại đó.

Ví dụ 3. Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & \text{khi } x > 1 \\ ax + b & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện cần

Ta có $f(1) = \frac{1}{3}$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^3}{3} \right) = \frac{1}{3}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b$.

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = \frac{1}{3}$.

Điều kiện đủ:

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + 1}{3} = 1.$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax - a}{x - 1} = a.$$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ thì $f'(1^+) = f'(1^-) \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$.

Vậy $a = 1; b = -\frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Số gia của hàm số $f(x) = x^3$ tại điểm $x_0 = 1$ ứng với $\Delta x = 1$ là

- A. 0. B. 1. C. 7. D. 9.

Câu 2: Biểu thức Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = x^2 - 1$ tính theo x và Δx là

- A. $\Delta y = 0, \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. B. $\Delta y = (\Delta x)^2 + 2x \cdot \Delta x, \frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x$.
C. $\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2, \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. D. $\Delta y = (\Delta x)^2, \frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x$.

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y = 2x + 1$ tại điểm $x_0 = -1$ là

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 4: Đạo hàm của hàm số $y = x^2 - x$ tại điểm x_0 là

- A. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(\Delta x)^2 - \Delta x]$. B. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(\Delta x)^2 - \Delta x - x_0^2 + x_0]$.
C. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - \Delta x]$. D. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\Delta x + 2x_0 - 1]$.

Câu 5: Đạo hàm của hàm số $y = x^2 + x$ tại điểm $x_0 = 1$ là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Giá trị của $y'(2)$ bằng

- A. $-\frac{1}{4}$. B. $-\frac{1}{x^2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Câu 7: Giá trị đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2x-1}$ tại điểm $x_0 = 5$ là

- A. 9. B. 6. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = x + |x|$. Giá trị $f'(0)$ bằng

- A. 2. B. 0. C. -1. D. Không tồn tại.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

- A. 0 B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. Không tồn tại.

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x > 0 \\ x + x^2 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 + |x+1|}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại $x = -1$.
B. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -1$ nhưng không có đạo hàm tại $x = -1$.
C. Hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = -1$.
D. Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 12: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$ bằng

- A. 0. B. 4. C. 5. D. Không tồn tại.

Câu 13: Đạo hàm của hàm số $y = c$ (c là hằng số) trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ bằng

- A. $y' = 0$. B. $y' = c$. C. $y' = 1$. D. $y' = x$.

Câu 14: Đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$ trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ bằng

- A. $y' = \frac{1}{x}$. B. $y' = 0$. C. $y' = x$. D. $y' = -\frac{1}{x^2}$.

Câu 15: Đạo hàm của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng

A. $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

C. $y' = \sqrt{x}$.

D. $y' = 0$.

Câu 16: Giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 4}{x - 2}, & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$ bằng

A. $m = 3$.

B. $m = 4$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$, biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$.

Giá trị của ab bằng

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. -8.

Câu 18: Nếu hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x + 1} & \text{khi } x \geq -1 \\ ax^2 + ax + b & \text{khi } x < -1 \end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thì giá trị $a + b$ là

A. -1.

B. 4.

C. 1.

D. -4

Dạng 2: Tìm hệ số góc của tiếp tuyến và viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm

Phương pháp giải

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$.

- Hệ số góc của tiếp tuyến tại x_0 là

$$k = f'(x_0)$$

- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm

$M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ví dụ. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = 2x^3 + 1$ tại điểm $(-1; -1)$.

Hướng dẫn giải

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2((-1 + \Delta x)^3 + 1) - (2(-1)^3 + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2(\Delta x)^2 - 6\Delta x + 6) = 6$$

$$\Rightarrow k = y'(-1) = 3.$$

Phương trình tiếp tuyến là

$$y + 1 = 6(x + 1) \Leftrightarrow y = 6x + 5.$$

Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc k của tiếp tuyến

+ Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, ta có

$$f'(x_0) = k(1)$$

+ Giải phương trình (1) tìm x_0 , từ đó

$$y_0 = f(x_0).$$

+ Phương trình tiếp tuyến phải tìm có dạng

$$y = k(x - x_0) + y_0.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại $x = 1$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - (1)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2.$$

Vậy hệ số góc là $k = y'(1) = 2$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^3$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị với đường thẳng $y = 3x - 2$.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3$ và đường thẳng $y = 3x - 2$ là

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Tại } x = 1 \text{ ta có } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x)^3 - (1)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 3\Delta x + 3) = 3.$$

Hệ số góc $k_1 = y'(1) = 3$.

$$\text{Tại } x = -2 \text{ ta có } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(-2 + \Delta x)^3 - (-2)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 - 6\Delta x + 12) = 12.$$

Hệ số góc $k_2 = y'(-2) = 12$.

Ví dụ 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3$ tại điểm có tung độ bằng 27.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y = 27 \Rightarrow x = -3$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(-3 + \Delta x)^3 + 27}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-(\Delta x)^2 + 9\Delta x - 27) = -27$$

$$\Rightarrow k = y'(-3) = -27$$

Phương trình tiếp tuyến $y - 27 = -27(x + 3) \Leftrightarrow y = -27x - 54$.

Ví dụ 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng

$$-\frac{1}{9}.$$

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x_0 + \Delta x - 1)(x_0 - 1)} = \frac{-1}{(x_0 - 1)^2}$$

$$f'(x_0) = k = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow -\frac{1}{(x_0 - 1)^2} = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

+ Với $x_0 = 4$ ta có $y_0 = \frac{4}{3}$, phương trình tiếp tuyến tại $\left(4; \frac{4}{3}\right)$ là

$$y = -\frac{1}{9}(x - 4) + \frac{4}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{16}{9}.$$

+ Với $x_0 = -2$ ta có $y_0 = \frac{2}{3}$, phương trình tiếp tuyến tại $\left(-2; \frac{2}{3}\right)$ là

$$y = -\frac{1}{9}(x + 2) + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{4}{9}.$$

Ví dụ 5. Chứng minh rằng để đường thẳng $(d): y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$(G): y = f(x)$ tại điểm $(x_0; f(x_0))$ thì điều kiện cần và đủ là $\begin{cases} a = f'(x_0) \\ ax_0 + b = f(x_0) \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị $(G): y = f(x)$ tại điểm $(x_0; f(x_0))$ khi và chỉ khi đồng thời xảy ra

- (d) và (G) cùng đi qua điểm $(x_0; f(x_0))$ tức là $ax_0 + b = f(x_0)$.
- Hệ số góc của (d) bằng đạo hàm của f tại x_0 , tức là $a = f'(x_0)$.

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

📌 Bài tập tự luyện dạng 2

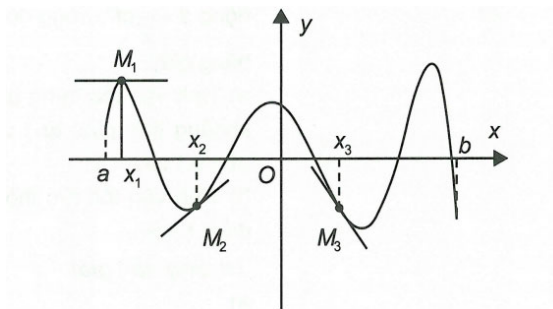
Câu 1: Cho đồ thị của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(a; b)$. Biết rằng tại các điểm $M_1; M_2; M_3$, đồ thị hàm số có tiếp tuyến được thể hiện như hình vẽ. Dựa vào hình vẽ hãy xét dấu của $f'(x_1), f'(x_2), f'(x_3)$.

A. $f'(x_1) < 0, f'(x_2) = 0, f'(x_3) > 0$.

B. $f'(x_1) > 0, f'(x_2) = 0, f'(x_3) < 0$.

C. $f'(x_1) = 0, f'(x_2) > 0, f'(x_3) < 0$.

D. $f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0, f'(x_3) = 0$.



Câu 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ là -1.

A. $x + y + 2 = 0$.

B. $y = x + 2$.

C. $y = x - 2$.

D. $y = -x + 2$.

Câu 3: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ tại điểm có hoành độ bằng 2 song song với đường thẳng $y = ax + b$. Giá trị $a + b$ bằng

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. -1.

Câu 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

A. $x + 4y - 1 = 0$ và $x + 4y + 1 = 0$.

B. $x + 4y - 4 = 0$ và $x + 4y + 4 = 0$.

C. $y = -\frac{1}{4}x - 4$ và $y = -\frac{1}{4}x + 4$.

D. $y = -\frac{1}{4}x$.

Câu 5: Hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại $x = \frac{1}{2}$ là

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 6: Hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại giao điểm của parabol với đường thẳng $y = 3x - 2$ bằng

A. 1 và 2.

B. 1 và 4.

C. 2 và 4.

D. 1 và 3.

Câu 7: Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$ là

A. $y = -3x - 4$.

B. $y = -1$.

C. $y = 3x - 2$.

D. $y = 3x + 2$.

Câu 8: Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8 là

A. $y = -12x + 16$.

B. $y = 8$.

C. $y = 12x - 24$.

D. $y = 12x - 16$.

Câu 9: Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là

A. $x + y + 2 = 0$.

B. $y = x + 2$.

C. $y = x - 2$.

D. $y = -x + 2$.

Dạng 3. Ứng dụng đạo hàm trong vật lý

Phương pháp giải

Vận tốc trung bình: $v_{tb} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$

Ví dụ 1. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8m/s^2$ và t được tính bằng giây.

a, Tính vận tốc trung bình của chuyển động trong

khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ trong trường hợp $\Delta t = 0,1$ và $t = 3$.

b, Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5s$.

Hướng dẫn giải

a,

$$v_{tb} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} \\ = gt + \frac{1}{2}g\Delta t.$$

Với $\Delta t = 0,1$ và $t = 3$ thì

$$v_{tb} = 9,8.3 + \frac{1}{2}.9,8.0,1 \approx 28,89(m/s).$$

b,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g(5 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}g.5^2}{\Delta t} \\ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(5g + \frac{1}{2}g\Delta t \right) = 49;$$

$$v(5) = s'(5) = 49(m/s).$$

Vận tốc tức thời: $v(t_0) = s'(t_0)$

Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng $Q = Q(t)$ là $I(t_0) = Q'(t_0)$.

Ví dụ 2. Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$.

Hướng dẫn giải

Vì $Q'(t) = 6$ nên cường độ dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$ là $I(10) = Q'(10) = 6$.

Ví dụ 1. Một chất điểm có phương trình chuyển động là $s = f(t) = t^2 + t + 6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét). Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t^3 + t + 6 - (t_0^3 + t_0 + 6)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} (t + t_0 + 1) = 2t_0 + 1.$

Vậy $f'(t_0) = 2t_0 + 1.$

Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là

$$v_u = f'(2) = 2.2 + 1 = 5 \text{ (m/s)}.$$

Ví dụ 2. Cho chuyển động xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 1$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t^3 - 3t^2 - 9t + 6 - (t_0^3 - 3t_0^2 - 9t_0 + 6)}{t - t_0} = 3t_0^2 - 6t_0 - 9;$$

$$a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(3t^2 - 6t - 9) - (3t_0^2 - 6t_0 - 9)}{t - t_0} = 6t_0 - 6.$$

Do đó $a = v' = -6t_0 + 6.$

Khi vận tốc triệt tiêu ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3.$

Khi đó gia tốc là $a(3) = 6.3 - 6 = 12 \text{ m/s}^2.$

Ví dụ 3. Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 3t^2 + 8t + 2$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính thời điểm cường độ của dòng điện trong dây dẫn $I = 50 \text{ A}.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{3t^2 + 8t + 2 - (3t_0^2 + 8t_0 + 2)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} (3t + 3t_0 + 8) = 6t_0 + 8.$$

Vậy $Q'(t) = 6t + 8.$ Do đó ta có phương trình

$$I = Q'(t) = 6t + 8 = 50 \text{ (A)} \Rightarrow t = 7 \text{ (s)}.$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Một chuyển động có phương trình $s(t) = t^2 - 2t + 4$ (trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây). Vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 1,5$ (giây) là

- A. 6m/s. B. 1m/s. C. 8m/s. D. 2m/s.

Câu 2: Xét chuyển động có phương trình $s(t) = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ trong đó t được tính bằng giây, và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời tại thời điểm t của chuyển động là

A. $v(t) = 18 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

B. $v(t) = -18 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $v(t) = 6 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $v(t) = -6 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 3: Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 10t$, trong đó $t > 0$ với t được tính bằng giây (s) và s được tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

A. 1m/s.

B. 3m/s.

C. 16m/s.

D. 13m/s.

Câu 4: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 + \frac{9}{2}t^2 - 6t$, trong đó t được tính bằng giây, s được tính bằng mét. Gia tốc của chất điểm tại thời điểm vận tốc bằng 24m/s là

A. $20 m/s^2$.

B. $12 m/s^2$.

C. $39 m/s^2$.

D. $21 m/s^2$.

Câu 5: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc bị triệt tiêu.

A. 11m/s.

B. 0m/s.

C. 12m/s.

D. 6m/s.

Câu 6: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t . Thời điểm t tại đó đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $t = 3$.

B. $t = 4$.

C. $t = 1$.

D. $t = 2$.

Câu 7: Một vật gaio động điều hòa có phương trình quãng đường phụ thuộc thời gian $s = A \sin(\omega t + \varphi)$, trong đó A, ω, φ là hằng số, t là thời gian. Khi đó biểu thức vận tốc của vật là

A. $v = A \cos(\omega t + \varphi)$.

B. $v = -A\omega \cos(\omega t + \varphi)$.

C. $v = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$.

D. $v = -A \cos(\omega t + \varphi)$.

Câu 8: Cho biết điện lượng của một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 3t^2 + 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 2$ bằng

A. 16 A.

B. 18 A.

C. 7 A.

D. 4 A.

Câu 9: Tomahawk là tên lửa hành trình có khả năng mang đầu đạn hạt nhân, được phóng đi từ các hệ thống phóng mặt đất. Giả sử rằng Tomahawk (không gắn với động cơ) được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó t là thời gian ($t > 0$, đơn vị giây) và $s(t)$ là khoảng cách của tên lửa so với mặt đất được tính bằng kilomet. Khoảng cách của tên lửa so với mặt đất tại thời điểm vận tốc bằng 0 bằng bao nhiêu?

A. 1069.

B. 1960.

C. 1690.

D. 1906.

Câu 10: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = 2t^4 + 6t^2 - 3t + 1$ với t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Hỏi gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ (s) bằng bao nhiêu?

A. $228 m/s^2$.

B. $64 m/s^2$.

C. $88 m/s^2$.

D. $76 m/s^2$.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN DẠNG 1

1- C	2- B	3- D	4- D	5- B	6- A	7- C	8- D	9- C	10- A
11- B	12- D	13- A	14- D	15- B	16- B	17- D	18- B		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1.**

$$\text{Ta có } \Delta y = f(2) - f(1) = 2^3 - 1^3 = 7.$$

Câu 2.

$$\text{Ta có } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - 1 - (x^2 - 1) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2; \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Câu 3.

$$\text{Ta có } \Delta y = 2(-1 + \Delta x) + 1 - (2(-1) + 1) = 2\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2. \text{ Suy ra } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 = 2.$$

$$\text{Vậy } y'(-1) = 2.$$

Câu 4.

Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - x$. Gọi Δx là số gia của đối số tại x_0 .

$$\text{Ta có } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = [(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x)] - [x_0^2 - x_0] = (\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x - \Delta x.$$

$$\text{Suy ra } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x_0 - 1).$$

$$\text{Vậy } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x_0 - 1).$$

Câu 5.

$$\text{Ta có } \Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x) - (1^2 + 1) = 3\Delta x + \Delta x^2; \text{ suy ra}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 + \Delta x) = 3.$$

Câu 6.

$$\text{Ta có } \Delta y = \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = \frac{-\Delta x}{(2 + \Delta x)2} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(2 + \Delta x)2}. \text{ Suy ra } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(2 + \Delta x)2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } y'(2) = -\frac{1}{4}.$$

Câu 7.

$$\text{Ta có } \Delta y = f(5 + \Delta x) - f(5) = \sqrt{9 + 2\Delta x} - 3; \text{ suy ra } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{9 + 2\Delta x} - 3}{\Delta x}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{9 + 2\Delta x - 3^2}{\Delta x(\sqrt{9 + 2\Delta x} + 3)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{9 + 2\Delta x} + 3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } y'(5) = \frac{1}{3}.$$

Câu 8.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - x}{x} = 0.$$

Vậy hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Câu 9.

$$\text{Ta có: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Câu 10.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \right) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + x^2) = 0$ nên hàm số liên tục tại $x = 0$.

$$\text{Ta lại có: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + x^2}{x} = 1.$$

Vậy $f'(0) = 1$.

Câu 11.

Hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 + |x + 1|}{x - 1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + |x + 1|}{x - 1} = -1 = f(-1)$ nên hàm số liên tục tại $x = -1$.

$$\text{Ta có } y = f(x) = \frac{2x^2 + |x + 1|}{x - 1} = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1} & \text{khi } x > -1, x \neq 1 \end{cases} \text{ nên}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x + 1 - (-1)}{x + 1} = 2 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\frac{2x^2 + x + 1}{x - 1} - (-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x}{x - 1} = 1.$$

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$. Do đó hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$.

Câu 12.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 3) = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3x - 4) = 0$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x = 1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

Câu 13.

$$\text{Ta có } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \Rightarrow f'(x) = 0.$$

Câu 14.

$$\text{Ta có } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + \Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}. \text{ Vậy } f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Câu 15.

Ta có

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Câu 16.

$$\text{Ta dễ dàng chứng minh được } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 4 \Leftrightarrow m = 4$.

$$\text{Mặt khác } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4}{x - 2} = 1.$$

Vậy với $m = 4$ thì hàm số đã cho có đạo hàm tại $x = 2$.

Câu 17.

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 2$ thì hàm số phải liên tục tại $x = 2$.

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - x^2 - 8x + 10) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) \Leftrightarrow -2 = 4 + 2a + b \Leftrightarrow 2a + b = -6.$$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$ nên

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \Leftrightarrow 4 + a = 0 \Leftrightarrow a = -4.$$

Suy ra $a = -4$. Vậy $ab = -8$.

Câu 18.

Với $x \neq -1$ hàm số luôn có đạo hàm nên để hàm số có đạo hàm với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì hàm số phải có đạo hàm tại $x = -1$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x + 1} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} (ax^2 + ax + b) = b$. Để hàm số liên tục tại $x = -1$ thì

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

Với $b = 0; a \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x + 1} - 0}{x + 1} = 4; \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ax^2 + ax - 0}{x + 1} = -a.$$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 0$ khi và chỉ khi:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = 4 \Rightarrow a = -4.$$

Vậy $a = -4, b = 0 \Rightarrow a + b = -4$.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN DẠNG 2

1- C	2- A	3- A	4- B	5- B	6- C	7- D	8- D	9- A	
------	------	------	------	------	------	------	------	------	--

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:

Đồ thị hàm số có tiếp tuyến tại các điểm $M_1; M_2; M_3$ nên hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại các điểm x_1, x_2, x_3 .

Dựa vào đồ thị ta thấy:

+) Tiếp tuyến tại điểm M_1 là một đường thẳng song song với trục hoành nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng 0. Suy ra $f'(x_1) = 0$.

+) Tiếp tuyến tại điểm M_2 là một đường thẳng đi từ trái sang phải nên hệ số góc của tiếp tuyến là một số dương. Suy ra $f'(x_2) > 0$.

+) Tiếp tuyến tại điểm M_3 là một đường thẳng đi xuống từ trái sang phải nên hệ số góc của tiếp tuyến là một số âm. Suy ra $f'(x_3) < 0$.

Câu 2.

Ta có $x = -1 \Rightarrow y = -1$. Khi đó $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{-1 + \Delta x} = -1 \Rightarrow k = y'(-1) = -1$.

Phương trình tiếp tuyến: $y = -x - 2$.

Câu 3.

Ta có $y_0 = y(2) = -4$. Hệ số góc của tiếp tuyến là

$$y'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^3 + 3x - 2 + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 - 2x - 1) = -9.$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 là $y = -9x + 14$. Vậy $a = -9; b = 14 \Rightarrow a + b = 5$.

Câu 4.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x_0 + \Delta x)x_0} = -\frac{1}{x_0^2};$$

$$f'(x_0) = k \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$, phương trình tiếp tuyến tại $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ là $y = -\frac{1}{4}x + 1 \Leftrightarrow x + 4y - 4 = 0$.

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$, phương trình tiếp tuyến tại $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ là

$$y = -\frac{1}{4}x - 1 \Leftrightarrow x + 4y + 4 = 0.$$

Câu 5.

$$\text{Ta có } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x) = 1.$$

$$\text{Hệ số góc } k = y' \left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Câu 6.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

$$\text{Tại } x = 1: \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - (1)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2.$$

$$\text{Hệ số góc } k_1 = y'(1) = 2.$$

$$\text{Tại } x = 2: \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - (2)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

$$\text{Hệ số góc } k_2 = y'(2) = 4.$$

Câu 7.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 - 3\Delta x + (\Delta x)^2) = 3 \Rightarrow k = y'(-1) = 3.$$

Phương trình tiếp tuyến: $y + 1 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 2$.

Câu 8.

$$y = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2) = 12$$

$$\Rightarrow k = y'(2) = 12$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến: } y - 8 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 16.$$

Câu 9.

$$\text{Ta có } x = -1 \Rightarrow y = -1.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{-1 + \Delta x} = -1 \Rightarrow k = y'(-1) = -1.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến: } y = -x - 2.$$

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN DẠNG 3

1- B	2- A	3- D	4- D	5- C	6- D	7- C	8- B	9- B	10- A
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1.**

Bằng định nghĩa tính được $s'(t) = 2t - 2$. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm

$$t = 1,5 \text{ (giây)} \text{ là } v(1,5) = s'(1,5) = 2 \cdot 1,5 - 2 = 1 \text{ (m/s)}.$$

Câu 2.

$$\text{Bằng định nghĩa tính được } s'(t) = 18 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Vận tốc tức thời tại thời điểm } t \text{ của chuyển động là } v(t) = s'(t) = 18 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Câu 3.

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm của một quãng đường:

$$\text{Bằng định nghĩa tính được } v(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 10.$$

Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường:

$$\text{Bằng định nghĩa tính được } a(t) = 3t^2 - 6t + 5$$

$$\text{Ta có } a(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t-1)^2 + 2 \geq 2 \text{ với mọi } t. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } t = 1.$$

$$\text{Khi đó, vận tốc của chuyển động là } v(1) = 13 \text{ (m/s)}.$$

Câu 4.

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường:

Bằng định nghĩa tính được $v(t) = s'(t) = 3t^2 + 9t - 6 = 24 \Rightarrow t = 2(s)$.

Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường:

Bằng định nghĩa tính được $a(t) = s''(t) = 6t + 9 \Rightarrow a(2) = 21(m/s^2)$.

Câu 5.

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường:

Bằng định nghĩa tính được $v = S' = -3t^2 + 6t + 9$.

Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường:

Bằng định nghĩa tính được $a = v' = S'' = -6t + 6$

Gia tốc triệt tiêu khi $S'' = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Khi đó vận tốc của chuyển động là $S'(1) = 12 \text{ m/s}$.

Câu 6.

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường:

Bằng định nghĩa tính được $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t = -3(t-2)^2 + 12 \leq 12$.

Dấu bằng xảy ra khi $t = 2$. Vậy $v(t)_{\max} \Leftrightarrow t = 2$.

Câu 7.

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường:

Bằng định nghĩa tính được $v = s' = (A \sin(\omega t + \varphi))' = A(\omega t + \varphi)' \cos(\omega t + \varphi) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$.

Câu 8.

Bằng định nghĩa tính được $Q'(t) = 6t + 6$.

Cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 1$ là $I = Q'(2) = 6.2 + 6 = 18(A)$.

Câu 9.

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường:

Bằng định nghĩa tính được $v(t) = s'(t) = 196 - 9,8t \Rightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 20(s)$.

$s(20) = 196.20 - 4,9.20^2 = 1960$.

Câu 10.

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường:

Bằng định nghĩa tính được $v(t) = (S(t))' = 8t^3 + 12t - 3$.

Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp 2 của quãng đường:

Bằng định nghĩa tính được $a(t) = S''(t) = 24t^2 + 12 \Rightarrow a(3) = 24.3^2 + 12 = 228(m/s^2)$.

Vậy gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3(s)$ là $228m/s^2$.

