

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI GIẢNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

- + Nắm được khái niệm góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng.
- + Nắm được phương pháp tính góc trong mỗi trường hợp cụ thể.

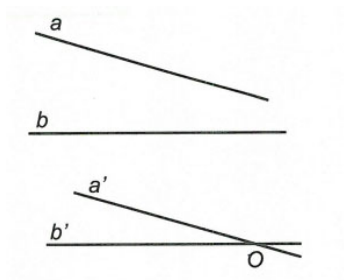
❖ **Kĩ năng**

- + Thành thạo các bước tính góc giữa hai đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng.
- + Vận dụng các quy tắc tính góc vào giải các bài tập liên quan.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Góc giữa hai đường thẳng

Định nghĩa: Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b .



Nhận xét:

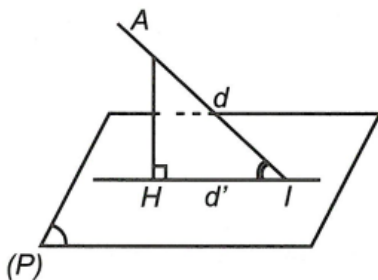
Để xác định góc giữa hai đường thẳng a, b ta lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

a) $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d, (P))} = 90^\circ$;

b) $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d, (P))} = \widehat{(d, d')} = \widehat{AIH}$.

(với d' là hình chiếu của d lên (P)).

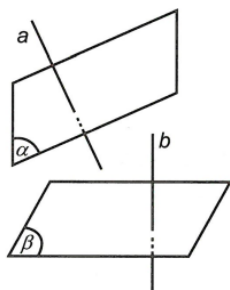


Chú ý: $0^\circ \leq \widehat{(d, (P))} \leq 90^\circ$.

Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



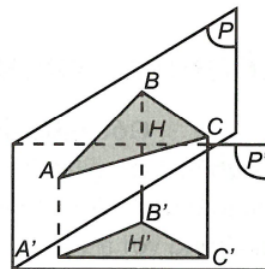
$$\left. \begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\widehat{(\alpha), (\beta)}) = (\widehat{a, b}).$$

Chú ý: $(\alpha) // (\beta) \Rightarrow (\widehat{(\alpha), (\beta)}) = 0^\circ$;

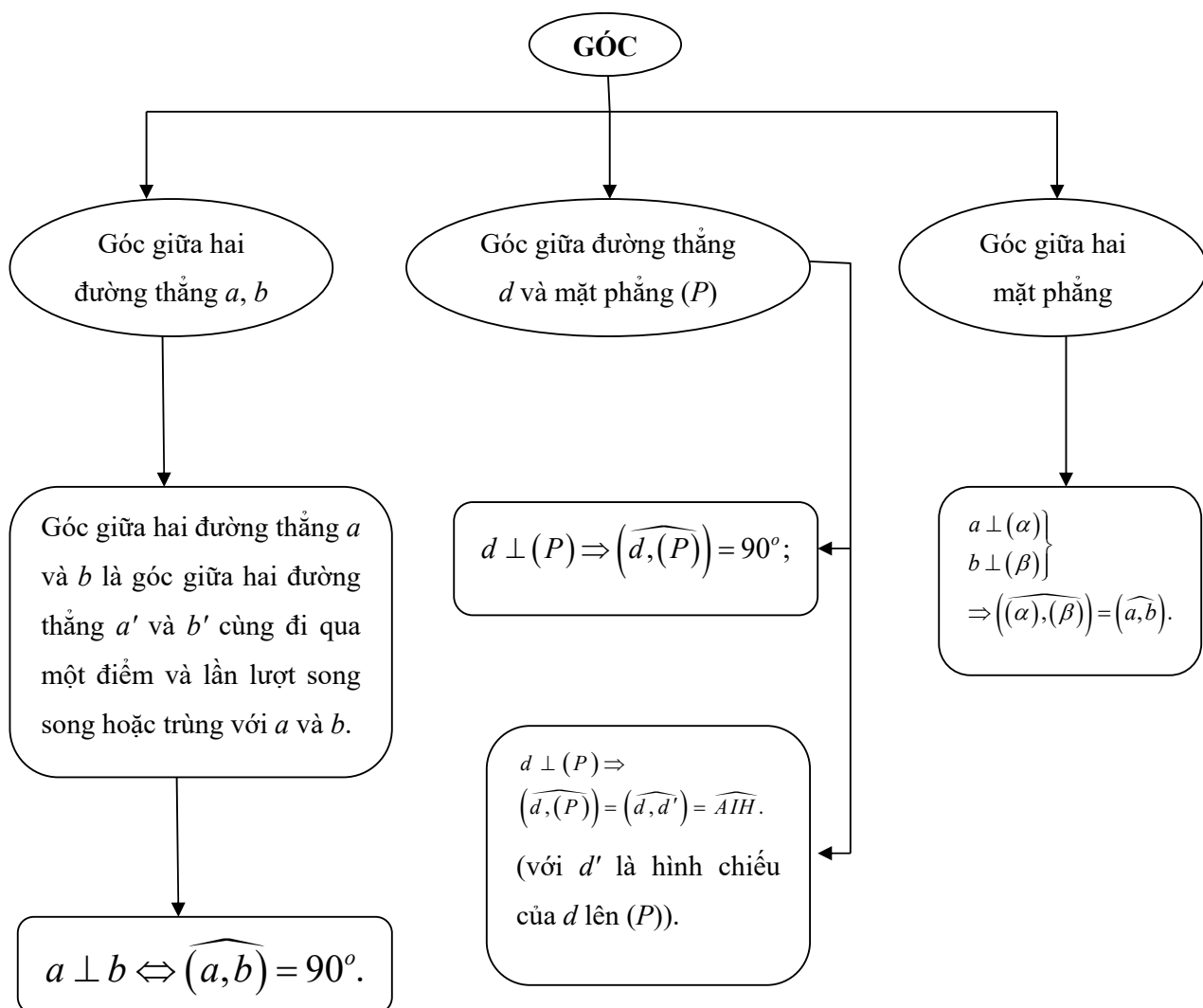
$$(\alpha) \equiv (\beta) \Rightarrow (\widehat{(\alpha), (\beta)}) = 0^\circ.$$

Diện tích hình chiếu đa giác

Gọi S là diện tích của đa giác H nằm trong mặt phẳng (P) ; S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') và φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') thì $S' = S \cdot \cos \varphi$.



SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Góc giữa hai đường thẳng

Phương pháp giải

Để tính góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 trong không gian ta có thể thực hiện như sau

Bước 1. Chọn một điểm O thích hợp (O thường nằm trên một trong hai đường thẳng).

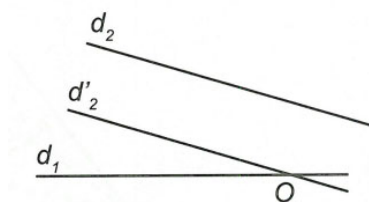
Bước 2. Từ O dựng các đường thẳng d'_1, d'_2 lần lượt song song (có thể trùng nếu O nằm trên một trong hai đường thẳng) với d_1 và d_2 . Góc giữa hai đường thẳng d'_1, d'_2 chính là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 .

Lưu ý: Để tính góc này ta thường sử dụng định lý côsin trong tam giác: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Cách khác: Tìm hai vec tơ chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ của hai đường thẳng d_1, d_2 .

Khi đó góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 xác định bởi $\cos(d_1, d_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|}$.

Ví dụ:



Góc giữa d_1, d_2 là góc giữa d_1, d'_2

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Góc giữa hai đường thẳng CD' và $A'C'$ bằng

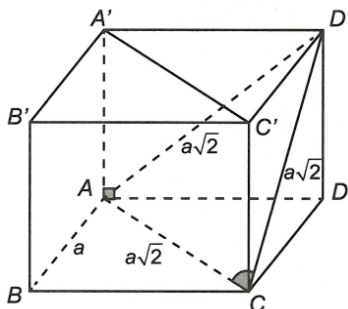
A. 30° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Hướng dẫn giải



Ta thấy $A'C' \parallel AC \Rightarrow (\widehat{CD', A'C'}) = (\widehat{CD', AC}) = \varphi$.

Do các mặt của hình lập phương bằng nhau nên các đường chéo bằng nhau.

Ta có $AC = CD' = AD' = a\sqrt{2}$.

Suy ra $\triangle ACD'$ đều nên $(\widehat{CD', AC}) = \varphi = 60^\circ$.

Chọn C.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc $(\widehat{IJ, CD})$ bằng

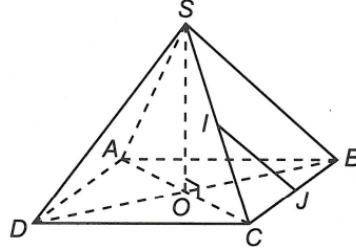
A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết ta có $IJ \parallel SB$ (do IJ là đường trung bình của $\triangle SCB$) và $AB \parallel CD \Rightarrow (\widehat{IJ, CD}) = (\widehat{SB, AB})$.

Mặt khác, ta lại có $\triangle SAB$ đều nên $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Suy ra $(\widehat{SB, AB}) = 60^\circ \Rightarrow (\widehat{IJ, CD}) = 60^\circ$.

Chọn C.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = a, SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa hai đường thẳng SB và CD là

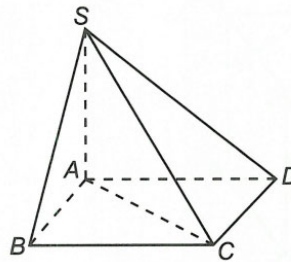
A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Hướng dẫn giải



Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$.

Do đó $(\widehat{SB, CD}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}$.

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow \triangle SAB$ vuông tại A

Xét tam giác vuông SAB ta có $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

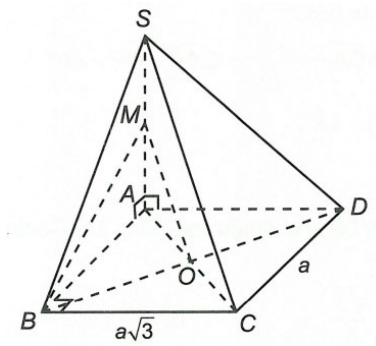
Vậy $\widehat{(SB, CD)} = 60^\circ$.

Chọn A.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng SC và BD bằng

- A. $\sqrt{\frac{3}{10}}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{10}$.

Hướng dẫn giải



Kẻ $OM \parallel SC \Rightarrow \widehat{(SC, BD)} = \widehat{(OM, BD)}$.

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3} \Rightarrow AC = BD = 2a$.

$$BO = \frac{BD}{2} = a, OM = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}; BM = \sqrt{MA^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

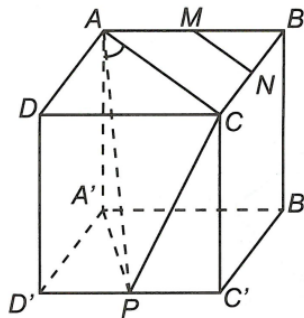
$$\cos \widehat{MOB} = \frac{OM^2 + BO^2 - BM^2}{2OM \cdot BO} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos \widehat{(SC, BD)} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn B.

Ví dụ 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC, C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng MN và AP là

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Hướng dẫn giải



Giả sử hình lập phương có cạnh bằng a .

Do $MN \parallel AC$ nên $\widehat{(MN, AP)} = \widehat{(AC, AP)}$.

Ta cần tính góc $\widehat{PAC}$.

$$\text{Vì } \triangle A'D'P \text{ vuông tại } D' \text{ nên } A'P = \sqrt{A'D'^2 + D'P^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\triangle AA'P \text{ vuông tại } A' \text{ nên } AP = \sqrt{A'A^2 + A'P^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}.$$

$$\triangle CC'P \text{ vuông tại } C' \text{ nên } CP = \sqrt{CC'^2 + C'P^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Ta có AC là đường chéo của hình vuông $ABCD$ nên $AC = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý Côsin trong tam giác ACP ta có:

$$CP^2 = AC^2 + AP^2 - 2AC \cdot AP \cdot \cos \widehat{CAP} \Rightarrow \cos \widehat{CAP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{CAP} = 45^\circ < 90^\circ.$$

Suy ra $(\widehat{AC, AP}) = \widehat{CAP} = 45^\circ$ hay $(\widehat{MN, AP}) = 45^\circ$.

Chọn A.

Lưu ý:

Cách khác: tính trực tiếp

$$\text{Áp dụng công thức } \cos(\widehat{MN, AP}) = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AP}|}$$

Ta tính được

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AP} = \frac{3a^2}{4}$$

$$|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AP}| = \frac{3\sqrt{2}a^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\widehat{MN, AP}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{MN, AP}) = 45^\circ$$

Ví dụ 6. Cho lăng trụ đều $ABC.DEF$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng $2a$. Cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BF là

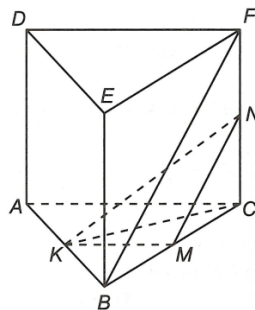
A. $\frac{\sqrt{5}}{10}.$

B. $\frac{\sqrt{3}}{5}.$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}.$

D. $\frac{\sqrt{3}}{10}.$

Hướng dẫn giải



Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CF, AB .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} MN \parallel BF \\ MK \parallel AC \end{cases} \Rightarrow (\widehat{AC, BF}) = (\widehat{MN, MK}).$$

Xét tam giác MNK , ta có:

$$MN = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + CF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

$$MK = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}, CK = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$NK = \sqrt{KC^2 + NC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{EMN} = \frac{ME^2 + MN^2 - EN^2}{2ME \cdot MN} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} - \frac{7a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

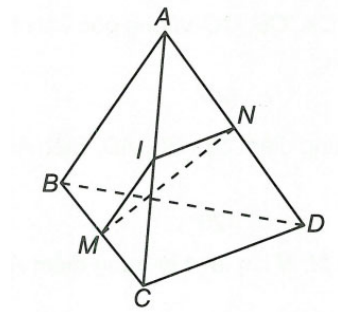
$$\text{Vậy } \cos(\widehat{AC, BF}) = |\cos \widehat{EMN}| = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Chọn A.

Ví dụ 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD , biết $AB = CD = a$,

$MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm của AC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} IM \parallel AB \\ IN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (\widehat{AB, CD}) = (\widehat{IM, IN}).$$

Đặt $\widehat{MIN} = \alpha$.

$$\text{Xét tam giác } IMN \text{ có } IM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}, IN = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}, MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Theo định lý côsin, ta có:

$$\cos \alpha = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2IM \cdot IN} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \widehat{MIN} = 120^\circ.$$

Vậy $\widehat{(AB, CD)} = 60^\circ$.

Cách khác:

Ta có $\widehat{(AB, CD)} = \widehat{(IM, IN)}$ nên ta tính $\cos \widehat{(IM, IN)}$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = (\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM})^2$$

$$= IM^2 + IN^2 - 2\overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IM}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{IM} = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2} = -\frac{a^2}{8}.$$

$$\text{Vậy } \cos \widehat{(AB, CD)} = \frac{1}{2}.$$

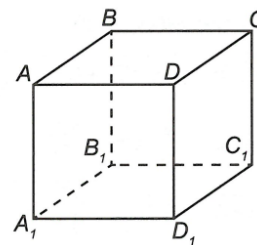
Do đó $\widehat{(AB, CD)} = 60^\circ$.

Bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập cơ bản

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng AD và BB_1 bằng

- A. 30° . B. 60° .
C. 45° . D. 90° .



Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và $B'D'$ bằng

- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có I, J tương ứng là trung điểm của BC và BB' . Góc giữa hai đường thẳng AC và IJ bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 120° .

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B , $SA = a$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm BC . Côsin của góc giữa đường thẳng AI và SC là

- A. $-\sqrt{\frac{2}{3}}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Câu 5. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$; OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi I là trung điểm BC . Góc giữa hai đường thẳng AB và OI bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . Biết $AB = CD = a$ và

$MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 30° .B. 90° .C. 120° .D. 60° .

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Biết $MN = a\sqrt{3}$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 45° .B. 90° .C. 60° .D. 30° .

Câu 8. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của BC . Côsin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.D. $\frac{1}{2}$.

Câu 9. Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$; $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. 0° .B. 120° .C. 60° .D. 90° .

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng m . Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa đường thẳng MN với các đường thẳng BC bằng

A. 30° .B. 45° .C. 60° .D. 90° .

Dạng 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Bài toán 1. Bài tập củng cố lý thuyết

Phương pháp giải

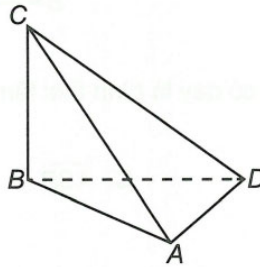
Nắm vững lý thuyết để xác định đúng góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh BA, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một. Góc giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (ADB) là góc

A. $\widehat{CDA}$.B. $\widehat{CAB}$.C. $\widehat{BDA}$.D. $\widehat{CDB}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $\begin{cases} CB \perp BD \\ CB \perp BA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (ABD)$.

Do đó BD là hình chiếu của CD trên (ABD) .

Suy ra góc giữa CD và (ABD) bằng $\widehat{CDB}$.

Chọn D.

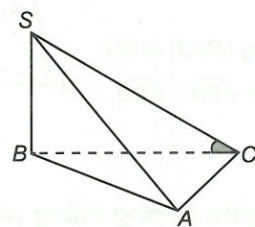
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có SB vuông góc (ABC) . Góc giữa SC với (ABC) là góc giữa

A. SC và AC .B. SC và AB .C. SC và BC .D. SC và SB .

Hướng dẫn giải

Hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC) là BC nên góc giữa SC với (ABC) là góc giữa SC và BC .

Chọn C.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và (SAD) là góc nào dưới đây?

A. $\widehat{BSD}$.

B. $\widehat{SBA}$.

C. $\widehat{BSA}$.

D. $\widehat{SBD}$.

Hướng dẫn giải

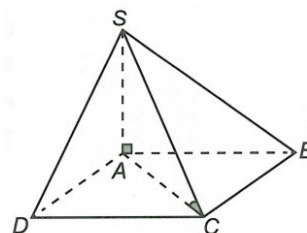
Ta có $SB \cap (SAD) = \{S\}$.

$$\left. \begin{array}{l} BA \perp SA \\ BA \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow BA \perp (SAD) \text{ tại } A$$

Suy ra SA là hình chiếu của SB lên (SAD)

$$\Rightarrow \widehat{(SB, (SAD))} = \widehat{(SB, SA)} = \widehat{BSA}.$$

Chọn C.



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy là hình thoi tâm O . Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) là góc giữa cặp đường thẳng nào?

A. SB và SA .

B. SB và AB .

C. SB và BC .

D. SB và SO .

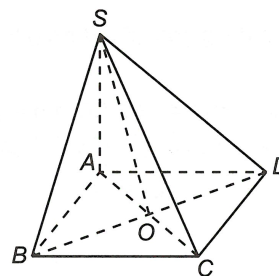
Hướng dẫn giải

Ta có $BO \perp AC, BO \perp SA \Rightarrow BO \perp (SAC)$

Suy ra hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SAC) là SO .

$$\text{Vậy } \widehat{(SB, (SAC))} = \widehat{(SB, SO)}.$$

Chọn D.



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm $O, SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SA và (SBD) là

A. $\widehat{ASD}$.

B. $\widehat{ASO}$.

C. $\widehat{ASB}$.

D. $\widehat{SAB}$.

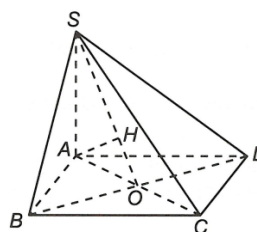
Hướng dẫn giải

Do $SA \perp BD, AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên SO .

Khi đó $AH \perp SO, AH \perp BD$.

Suy ra $AH \perp (SBD)$.



Do đó hình chiếu của SA xuống (SBD) là SH .

Vậy góc giữa SA và (SBD) là $\widehat{ASH} = \widehat{ASO}$.

Chọn B.

Bài toán 2. Xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

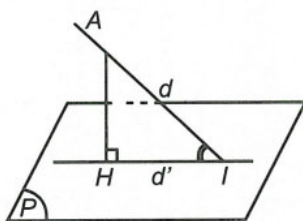
🔧 Phương pháp giải

Trường hợp 1. $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d, (P))} = 90^\circ$.

Trường hợp 2. d không vuông góc với (P) . Khi đó ta làm như sau:

Bước 1. Tìm $d \cap (P) = \{I\}$.

Bước 2. Trên d lấy điểm A khác I . Tìm hình chiếu H của A lên (P) . Thông thường ta chọn điểm A trên d thỏa mãn A thuộc đường thẳng Δ vuông góc với (P) . (Khi đó hình chiếu của A là giao điểm của Δ và (P)).

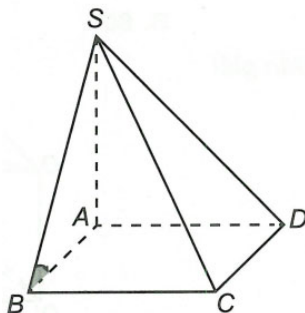


Bước 3. Suy ra $\widehat{(d, (P))} = \widehat{(AI, HI)} = \widehat{AIH}$.

Tính $\widehat{AIH}$ (nếu đề bài yêu cầu tính góc).

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định $\cot \varphi$.

Hướng dẫn giải



Ta có $SB \cap (ABCD) = \{B\}$.

Trên SB chọn điểm S . Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.

Suy ra $\widehat{(SB, (ABCD))} = \widehat{(SB, BA)} = \widehat{SBA}$.

Vậy $\cot \varphi = \frac{AB}{SA} = \frac{2a}{a} = 2$.

🔧 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC) .

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 75° .

Hướng dẫn giải

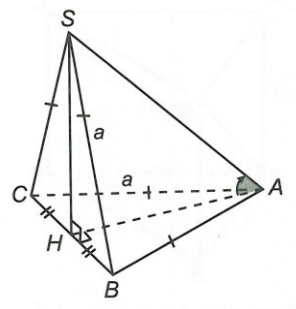
Ta có $SH \perp (ABC)$.

$$\Rightarrow \widehat{(SA, (ABC))} = \widehat{SAH} = \alpha$$

ΔABC và ΔSBC là hai tam giác đều cạnh a nên $AH = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra ΔSHA vuông cân tại $H \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Chọn B.



Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa $A'C'$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

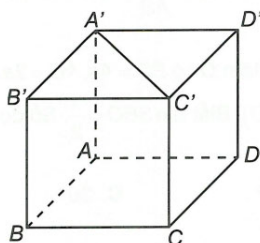
A. 45° .

B. 0° .

C. 90° .

D. 30° .

Hướng dẫn giải



Dễ dàng thấy góc giữa $A'C'$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{A'C'B'} = 45^\circ$.

Chọn A.

Ví dụ 3. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $AA' = a$. Góc hợp bởi đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 90° .

B. 60° .

C. 30° .

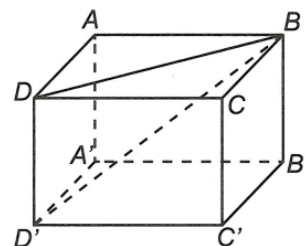
D. 45° .

Hướng dẫn giải

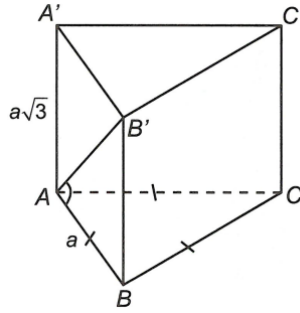
Do $DD' \perp (ABCD)$ nên góc hợp bởi đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{D'BD}$.

$$\tan \widehat{D'BD} = \frac{DD'}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{D'BD} = 30^\circ.$$

Chọn C.



Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ΔABC đều cạnh a , $AA' = \sqrt{3}a$. Góc giữa đường thẳng AB' và (ABC) bằng

A. 45° .B. 30° .C. 60° .D. 45° .**Hướng dẫn giải**

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên AB là hình chiếu vuông góc của AB' trên (ABC) .

Suy ra góc giữa đường thẳng AB' và (ABC) bằng $\widehat{B'AB}$.

$\Delta B'AB$ vuông tại B nên $\tan \widehat{B'AB} = \frac{BB'}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{B'AB} = 60^\circ$.

Chọn C.

Ví dụ 5. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $BD = 4a, AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan \widehat{SBO} = \frac{1}{2}$. Số đo góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng

A. 60° .B. 75° .C. 30° .D. 45° .**Hướng dẫn giải**

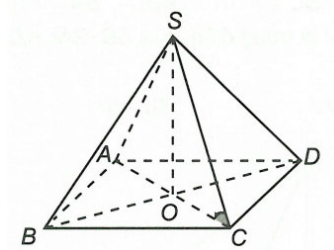
Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCO}$.

$BD = 4a \Rightarrow BO = 2a$;

$SO = BO \cdot \tan \widehat{SBO} = 2a \cdot \frac{1}{2} = a$;

$AC = 2a \Rightarrow OC = a$.

Vậy $\widehat{SCO} = 45^\circ$.

Chọn D.

Ví dụ 6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là

A. 30° .B. 75° .C. 60° .D. 45° .**Hướng dẫn giải**

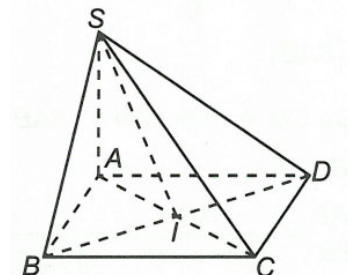
Gọi I là tâm của hình vuông của $ABCD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.

Mặt khác vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$.

Suy ra $BD \perp (SAC)$ do đó góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là góc $\widehat{BSI}$.

Ta có $SB = a\sqrt{2}; BI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$



$$\Rightarrow \sin \widehat{BSI} = \frac{BI}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSI} = 30^\circ.$$

Chọn A.

Ví dụ 7. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng

A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Hướng dẫn giải

Kẻ $AH \perp SB$ ($H \in SB$) (1).

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$.

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng góc giữa SA và SH bằng $\widehat{ASH}$.

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Trong } \triangle SAB \text{ ta có } \sin \widehat{ASB} = \frac{AB}{SB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{ASB} = \widehat{ASH} = 30^\circ.$$

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 30° .

Chọn B.

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a\sqrt{3}$, $AB = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B . Gọi M là trung điểm của SB . Góc giữa đường thẳng CM và mặt phẳng (SAB) bằng

A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Do đó BM là hình chiếu của CM lên mặt phẳng (SAB) .

$$\text{Suy ra } (\widehat{CM, (SAB)}) = \widehat{CMB}.$$

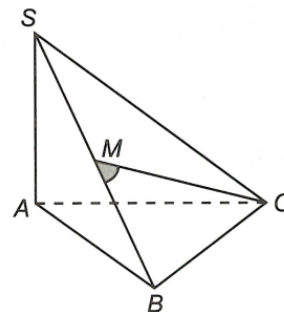
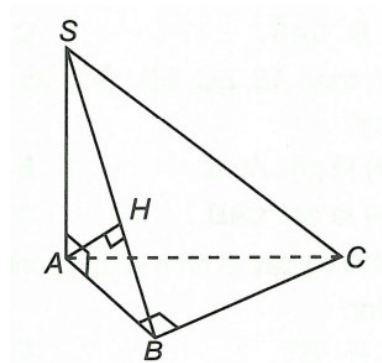
$$\text{Ta có: } \tan \widehat{CMB} = \frac{BC}{MB} = \frac{2AB}{SB} = \frac{2AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2.2a}{\sqrt{(2a\sqrt{3})^2 + (2a)^2}} = 1.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{CMB} = 45^\circ.$$

$$\text{Vậy } (\widehat{CM, (SAB)}) = 45^\circ.$$

Chọn C.

 **Bài tập tự luyện dạng 2**



Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là

- A. $\widehat{SCB}$. B. $\widehat{CAS}$. C. $\widehat{SCA}$. D. $\widehat{ASC}$.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCB$ có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Góc giữa AC và (BCD) là góc ACB . B. Góc giữa AD và (ABC) là góc ADB .
C. Góc giữa AC và (ABD) là góc CAB . D. Góc giữa CD và (ABD) là góc CBD .

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = \sqrt{2}a$ và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 3. Số đo của góc giữa cạnh bên và mặt đáy (làm tròn đến phút) gần bằng

- A. $69^\circ 18'$. B. $28^\circ 8'$ C. $75^\circ 2'$. D. $61^\circ 52'$.

Câu 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) là

- A. 45° . B. 30° C. 60° . D. 90° .

Câu 6. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = 2a, AB = 3a$. Góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh a , tâm $O, SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và (SAB) bằng α với $\tan \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$. Góc giữa SO và $(ABCD)$ bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$ có $ABCD$ đều cạnh a , AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) và $AB = 2a$. Gọi M là trung điểm của AD . Giá trị $\tan$ của góc giữa CM và mặt phẳng (BCD) bằng

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. Không xác định.

Câu 9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của SD . Giá trị $\tan$ của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy; $SA = AB = a$. Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm của $AB, SH = HC, SA = AB$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$. Giá trị $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dạng 3. Góc giữa hai mặt phẳng

Bài toán 1. Các bài tập củng cố lý thuyết

Phương pháp giải

Nắm vững lý thuyết để xác định đúng góc giữa hai mặt phẳng:

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{((\alpha), (\beta))} = \widehat{(a, b)}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$, gọi I là trung điểm BC . Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

A. $\widehat{SBA}$.

B. $\widehat{SCA}$.

C. $\widehat{SCB}$.

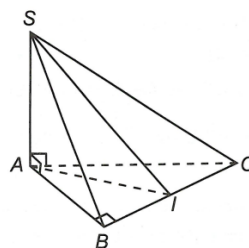
D. $\widehat{SIA}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $BC \perp SA, BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$.

$$\text{Suy ra } \left\{ \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AB \perp BC, AB \subset (ABC) \\ SB \perp BC, SB \subset (SBC) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{(AB, SB)} = \widehat{SBA}.$$



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABS}$.

B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

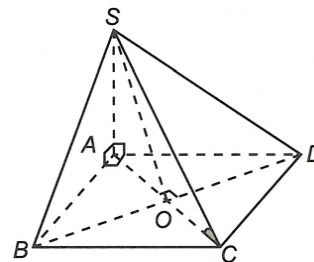
D. $(SAC) \perp (SBD)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \left\{ \begin{array}{l} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ AB \perp AD, AB \subset (ABCD) \\ SA \perp AD, SA \subset (SAD) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \widehat{((SAD), (ABCD))} = \widehat{(SA, AB)} = \widehat{SAB}.$$

Chọn C.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC vuông ở A . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $(SAB) \perp (ABC)$.

B. $(SAB) \perp (SAC)$.

C. Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$ thì $\widehat{AHS} = \widehat{((SBC), (ABC))}$.

D. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là góc $\widehat{SCB}$.

Hướng dẫn giải

+) $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$ nên đáp án A đúng.

+) $AB \perp AC, AB \perp SA \Rightarrow AB \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$ nên đáp án B đúng.

+) $AH \perp BC; BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH)$

$\Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow \widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{SHA}$.

Vậy đáp án C đúng.

+) $(SBC) \cap (SAC) = SC$ nhưng $BC \not\perp SC$ nên đáp án D sai.

Chọn D.

Ví dụ 4. Cho tứ diện ABCD có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AIB}$

B. $(BCD) \perp (AIB)$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

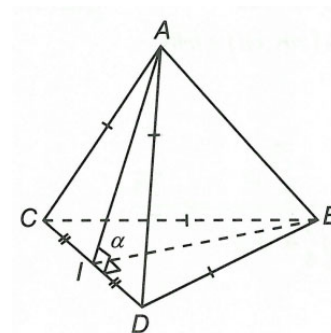
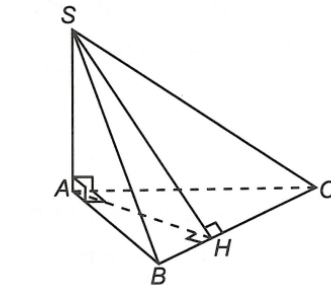
D. $(ACD) \perp (AIB)$.

Hướng dẫn giải

Ta có:
$$\begin{cases} (ABC) \cap (ABD) = AB \\ BC \not\perp AB \\ BD \not\perp AB \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{((ABD), (ABC))} \neq \widehat{CBD}$. Đáp án C sai.

Chọn C.



Bài toán 2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng bằng cách dùng định nghĩa

✚ Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. 30° .

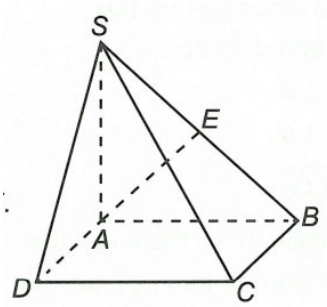
B. 90° .

C. 0° .

D. 45° .

Hướng dẫn giải

Ta có
$$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD).$$



Gọi E là hình chiếu của A lên SB , dễ thấy $AE \perp (SBC)$.

Vậy góc giữa (SAD) và (SBC) là góc giữa AB và AE .

Ta có $\triangle SAB$ vuông cân tại A nên $\widehat{SBA} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{BAE} = 45^\circ$ là góc giữa AB và AE .

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng 45° .

Chọn D.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi H, K là trung điểm của AB, CD .

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên SH là đường cao của hình chóp.

Ta có $HK \perp AB, HK \perp SH \Rightarrow HK \perp (SAB)$ (1)

Dựng $HI \perp SK \Rightarrow HI \perp (SCD)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là $(HK, HI) = \widehat{IHK}$.

Ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; HK = a$.

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

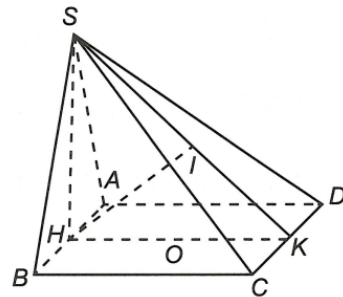
$$\text{Vậy } \cos \widehat{IHK} = \frac{HI}{HK} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Chọn A.

Bài toán 2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa trên giao tuyến

 **Phương pháp giải**

Dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau: “Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm”.



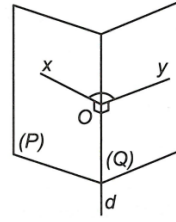
Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q) .

Bước 2. Chọn điểm O trên d , từ đó:

+) Trong (P) dựng $Ox \perp d$.

+) Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

Khi đó: $\widehat{((\alpha), (\beta))} = \widehat{(Ox, Oy)}$.



Lưu ý: Việc xác định điểm O có thể được thực hiện theo cách sau: Chọn điểm M trên (Q) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu H của nó trên (P) . Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{((\alpha), (\beta))} = \widehat{MOH}$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng

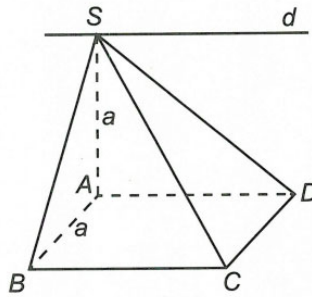
A. 30° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 45° .

Hướng dẫn giải



Mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAD) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng $d // BC // AD$.

Vì $SA \perp d, SB \perp d$ nên $\widehat{((SBC), (SAD))} = \widehat{(SA, SB)} = \widehat{ASB}$.

Vậy $\triangle ASB$ vuông cân tại A nên $\widehat{ASB} = 45^\circ$.

Chọn D.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng

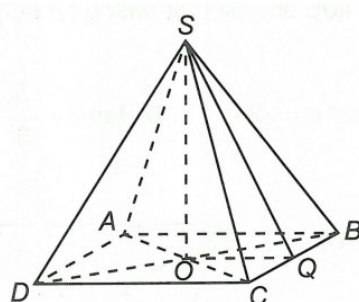
A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Hướng dẫn giải



Gọi Q là trung điểm BC , suy ra $OQ \perp BC$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBC), (ABCD))} = \widehat{(SQ, OQ)} = \widehat{SQO}.$$

$$\text{Tam giác vuông } SOQ \text{ có } \tan \widehat{SQO} = \frac{SO}{OQ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SQO} = 60^\circ.$$

Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° .

Chọn C.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$, $SA = \sqrt{3}cm$, $AB = 1cm$. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy góc bằng

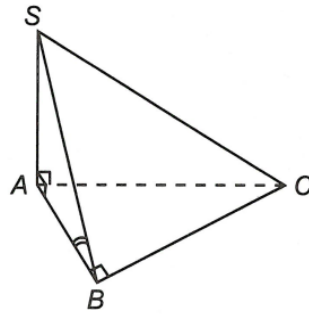
A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Hướng dẫn giải



Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$ mà $AB \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp BC$.

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AB \perp BC \\ SB \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{SBA}.$$

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa (SBC) và mặt đáy (ABC) bằng 60° .

Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc hợp bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) . Khi đó

A. $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\tan \varphi = \sqrt{2}$.

D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

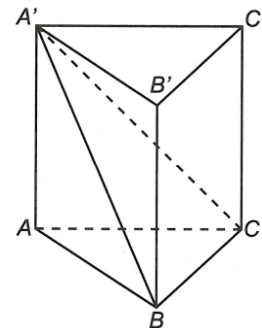
$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp A'B.$$

$$\text{Do } \begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ A'B \subset (A'BC); A'B \perp BC \text{ nên } \widehat{A'BA} = \varphi \text{ là góc hợp bởi hai mặt} \\ AB \subset (ABC); AB \perp BC \end{cases}$$

phẳng $(A'BC)$ và (ABC) .

$$\text{Xét } \triangle A'BC \text{ vuông tại } A \text{ ta có } \tan \varphi = \frac{A'A}{BA} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$$

Chọn C.



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$, $AB = BC = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

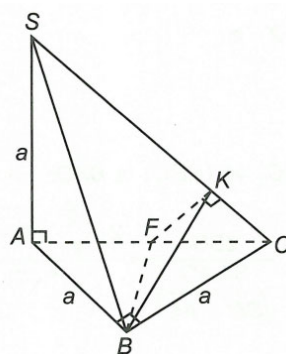
A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Hướng dẫn giải



Ta có $(SAC) \cap (SBC) = SC$.

Gọi F là trung điểm AC thì $BF \perp (SAC)$.

Dựng $BK \perp SC$ tại $K \Rightarrow SC \perp (BKF) \Rightarrow \widehat{((SAC), (SBC))} = \widehat{(KB, KF)} = \widehat{BKF}$.

$$\text{Để thấy } \triangle CFK \sim \triangle CSA \Rightarrow \frac{FK}{FC} = \frac{SA}{SC} \Rightarrow FK = \frac{FC \cdot SA}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

$$\triangle BFK \text{ vuông tại } F \text{ có } \tan \widehat{BKF} = \frac{FB}{FK} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{\sqrt{6}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BKF} = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° .

Chọn C.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa (SAC) và (SBC) bằng

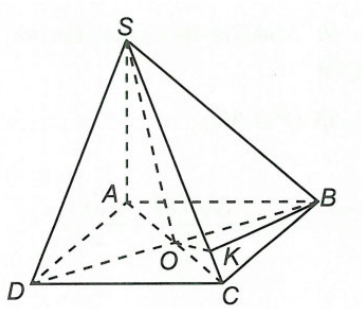
A. 30° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Hướng dẫn giải



Gọi O là tâm đáy và K là hình chiếu vuông góc của O trên SC .

Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases}$ nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA} = \alpha$.

Ta có $\tan \alpha = \frac{SA}{OA} = \sqrt{2} \Rightarrow SA = OA \cdot \sqrt{2} = a$.

Do $\begin{cases} SC \perp BD \\ SC \perp OK \end{cases}$ nên $SC \perp BK$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là $\widehat{BKO}$.

Ta có $\tan \widehat{BKO} = \frac{BO}{OK} = \frac{BO}{\frac{1}{2}d(A, SC)} = \frac{2BO}{\frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2}}{1 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{3}$.

Suy ra $\widehat{BKO} = 60^\circ$.

Chọn C.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $\triangle SAB$ là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Gọi φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD) . Giá trị của $\cos \varphi$ bằng

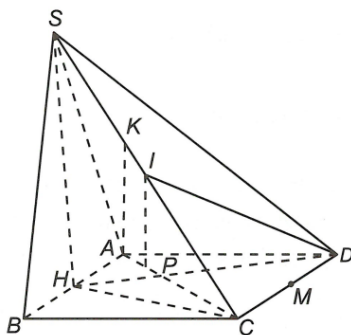
A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{7}$.

C. $\frac{5}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{7}$.

Hướng dẫn giải



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, CD . Vì ΔSAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Kẻ $AK \perp SC (K \in SC), DI \perp SC (I \in SC), IP \parallel AK (P \in AC)$.

Suy ra $\varphi = \widehat{(IP, ID)}$.

$$\text{Ta có } HC = HD = \frac{a\sqrt{5}}{2}, SC = SD = a\sqrt{2}, SM = \frac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow DI = \frac{SM \cdot CD}{SD} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

$$\Delta CSA = \Delta SCD \Rightarrow AK = DI = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

$$CI = SK = \sqrt{CD^2 - DI^2} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow CK = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\Delta CPI \sim \Delta CAK \Rightarrow IP = \frac{CI}{CK} \cdot AK = \frac{a\sqrt{14}}{12}, AP = \frac{KI}{CK} \cdot AC = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

Áp dụng định lí côsin, ta có

$$\Delta APD \text{ có } PD = \sqrt{AP^2 + AD^2 - 2AP \cdot AD \cdot \cos 45^\circ} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

$$\Delta IPD \text{ có } \cos \widehat{PID} = \frac{IP^2 + ID^2 - DP^2}{2 \cdot IP \cdot ID} = \frac{5}{7}.$$

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \frac{5}{7}.$$

Chọn C.

Bài toán 2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng bằng cách dùng định lý hình chiếu

 **Phương pháp giải**

Dùng định lý về diện tích hình chiếu:

Gọi S là diện tích của đa giác H trong (P) và S' là diện tích hình chiếu của H trên (P') và φ là góc giữa (P) và (P') thì $S' = S \cdot \cos \varphi$ hay $\cos \varphi = \frac{S'}{S}$.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng AA', BB', CC' thỏa mãn diện tích của tam giác MNP bằng a^2 . Góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ là

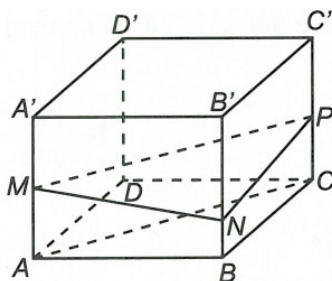
A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 120° .

Hướng dẫn giải



Gọi α là số đo góc của hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$.

Ta có hình chiếu vuông góc của tam giác MNP lên $(ABCD)$ là $\triangle ABC$.

Áp dụng công thức hình chiếu về diện tích ta có

$$S'_{\triangle ABC} = S_{\triangle MNP} \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot BC = a^2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Vậy góc của hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ bằng 60° .

Chọn A.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$, trên đường thẳng d vuông góc với (ABC) tại điểm A ta lấy một điểm D . Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) trong trường hợp $\triangle DBC$ là tam giác đều là

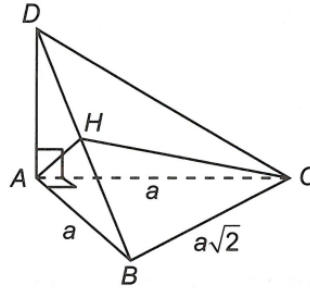
A. $\arccos \frac{1}{3}$.

B. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) .

Theo công thức diện tích hình chiếu của đa giác, ta có: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC} \cdot \cos \varphi$.

$$\text{Mà } S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} DB \cdot DC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} a^2.$$

$$\text{Suy ra } \cos \varphi = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DBC}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn B.

Ví dụ 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm CC' . Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông ở A . Côsin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

B. $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

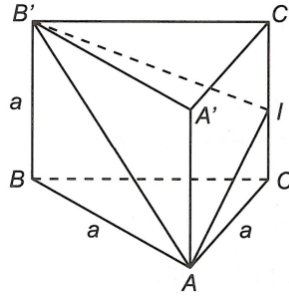
C. $\frac{10}{\sqrt{30}}$.

D. $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{30}}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng định lý Côsin cho $\triangle ABC$ ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ = 3a^2.$$



Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có:

$$B'A^2 = 2a^2; AI^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}; B'I^2 = 3a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}.$$

Ta có: $B'A^2 + AI^2 = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} = \frac{13a^2}{4} = B'I^2 \Rightarrow \triangle AB'I$ vuông ở A .

$$\text{Ta có: } S_{\triangle AB'I} = \frac{1}{2} AI \cdot AB' = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a^2 \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AB'I}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{10}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$, gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABS}$.
- B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$.
- C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.
- D. $(SAC) \perp (SBD)$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC) , tam giác ABC vuông cân ở A và có đường cao AH ($H \in BC$). Gọi O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $SA \perp (ABC)$.
- B. $(SAH) \perp (SBC)$.
- C. $O \in SC$.
- D. Góc giữa (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA}$.

Câu 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác ABC bằng 5. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' và diện tích tam giác MNP bằng 10. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) bằng

- A. 60° .
- B. 30° .
- C. 90° .
- D. 45° .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = 2a$, $AD = DC = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 5. Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AM = \frac{3a}{4}$. Tan của góc hợp bởi hai mặt phẳng (MBC) và (ABC) là

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 6. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có chiều cao bằng a , thể tích bằng $\sqrt{3}a^3$. Góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy bằng

- A. 75° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A . Cạnh bên SA vuông góc mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{12}$.

Câu 8. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SCD) . Giá trị của $\cos\alpha$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{21}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{21}}{14}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 9. Cho lăng trụ đứng $OAB.O'A'B'$ có các đáy là các tam giác vuông cân $OA = OB = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, P lần lượt là trung điểm các cạnh OA, AA' . Diện tích thiết diện khi cắt lăng trụ bởi $(B'MP)$ bằng

- A. $\frac{a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$. B. $\frac{5a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$. C. $\frac{5a^2\sqrt{15}}{6\sqrt{2}}$. D. $\frac{a^2\sqrt{15}}{6\sqrt{2}}$.

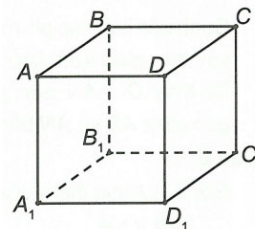
ĐÁP ÁN

Dạng 1. Góc giữa hai đường thẳng

1- D	2- D	3- B	4- C	5- D	6- D	7- C	8- B	9- C	10- B
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

Câu 1.

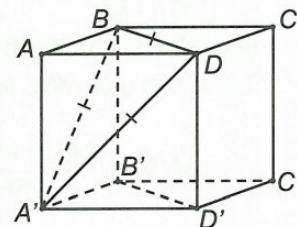
$$\text{Ta có } \begin{cases} AD \perp (ABB_1A_1) \\ BB_1 \subset (ABB_1A_1) \end{cases} \Rightarrow AD \perp BB_1 \Rightarrow \widehat{(AD, BB_1)} = 90^\circ.$$



Câu 2.

Vì $BD \parallel B'D'$ nên góc giữa hai đường thẳng BA' và $B'D'$ bằng góc giữa hai đường thẳng BA' và BD .

Ta có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $A'BD$ là tam giác đều. Khi đó góc giữa hai đường thẳng BA' và BD bằng $\widehat{ABD} = 60^\circ$.



Câu 3.

Gọi K là trung điểm của AB

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $KI \parallel AC$.

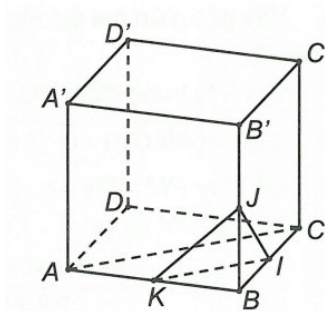
Suy ra góc giữa AC và IJ bằng góc giữa KI và IJ .

$$\text{Ta có } IK = \frac{1}{2}AC; IJ = \frac{1}{2}B'C; KJ = \frac{1}{2}AB'.$$

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AC = B'C = AB' \Rightarrow KI = IJ = JK$.

Suy ra ΔIJK là tam giác đều, nên $\widehat{KIJ} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa AC và IJ bằng 60° .



Câu 4.

Gọi H là trung điểm SB ta có $SC \parallel HI$.

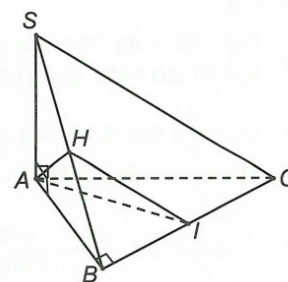
Góc giữa đường thẳng AI và SC bằng góc giữa đường thẳng AI và HI .

$$AH = \frac{1}{2}SB = \frac{\sqrt{AB^2 + SA^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$AI = \sqrt{AB^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

$$HI = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a; AI^2 = AH^2 + HI^2.$$

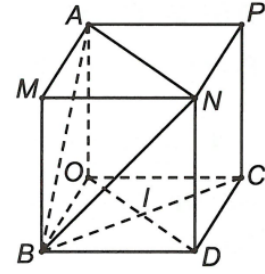
Suy ra tam giác AHI vuông tại H , $\cos \widehat{AIH} = \frac{HI}{AI} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.



Vậy cosin của góc giữa đường thẳng AI và SC là $\cos \widehat{AIH} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 5.

Vì tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$; OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một nên ta có thể dựng hình lập phương $AMNP.OBDC$ (như hình vẽ) với I là trung điểm BC ; $\{I\} = OD \cap BC$.



Cạnh của hình lập phương trên bằng a nên $AB = AN = NB = a\sqrt{2}$ vậy tam giác ABN đều.

Dễ thấy $OI \parallel AN$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và OI bằng góc giữa AB và AN bằng 60° .

Câu 6.

Gọi E là trung điểm của BD .

Vì $\begin{cases} AB \parallel NE \\ CD \parallel ME \end{cases}$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa

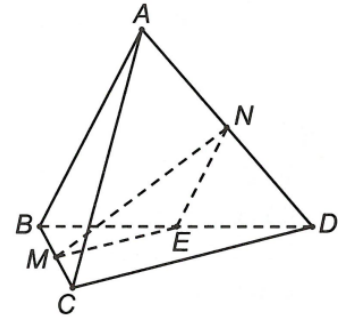
hai đường thẳng NE và ME .

Trong tam giác MNE ta có:

$$\cos \widehat{MEN} = \frac{ME^2 + NE^2 - MN^2}{2ME \cdot NE} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a^2}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $\widehat{MEN} = 120^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 60° .



Câu 7.

Gọi P là trung điểm AC , ta có $PM \parallel CD$ và $PN \parallel AB$ suy ra

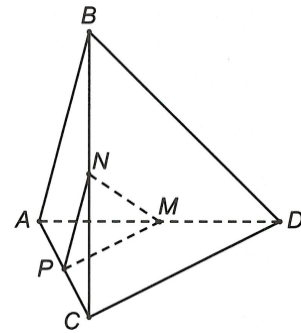
$$(\widehat{AB, CD}) = (\widehat{PM, PN}).$$

Dễ thấy $PM = PN = a$. Xét $\triangle PMN$ ta có:

$$\cos \widehat{MPN} = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM \cdot PN} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{MPN} = 120^\circ.$$

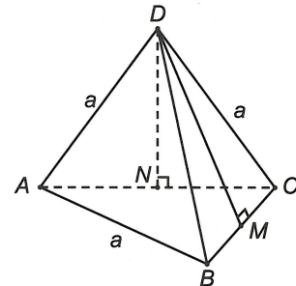
$$\text{Suy ra } (\widehat{AB, CD}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$



Câu 8.

Gọi N là trung điểm của AC .

Khi đó $AB \parallel MN$ nên $(\widehat{DM, AB}) = (\widehat{DM, MN})$.



Để dàng tính được $DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $MN = \frac{a}{2}$.

Trong tam giác DMN , ta có:

$$\cos \widehat{DMN} = \frac{DM^2 + MN^2 - DN^2}{2DM \cdot MN} = \frac{\frac{a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

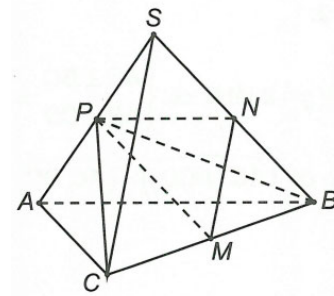
Vì $\cos \widehat{DMN} = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$ nên $\cos(\widehat{DM, MN}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Vậy $\cos(\widehat{DM, AB}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 9.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, SB, SA .

Góc giữa AB và SC là góc giữa PN và MN .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MN &= \frac{a}{2} = NP; PC = BP = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow PM = \sqrt{PC^2 - CM^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$



Suy ra $\triangle MNP$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{MNP} = 60^\circ$. Vậy góc giữa AB và SC bằng 60° .

Câu 10.

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

Khi đó, ta có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = m$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}) = 60^\circ$.

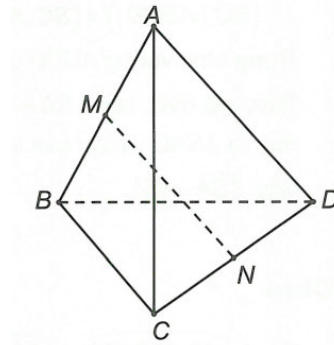
Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{m}{2}$.

Vì M, N là trung điểm của AB và CD nên

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}).$$

$$MN^2 = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}) = \frac{m^2}{2} \Rightarrow MN = \frac{m\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b})(-\vec{b} + \vec{c}) = \frac{m^2}{2} \Rightarrow \cos(\widehat{MN, BC}) = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\frac{m^2}{2}}{m \cdot \frac{m\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BC bằng 45° .

Dạng 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

1- C	2- A	3- A	4- D	5- C	6- A	7- D	8- A	9- B	10- B
11- B									

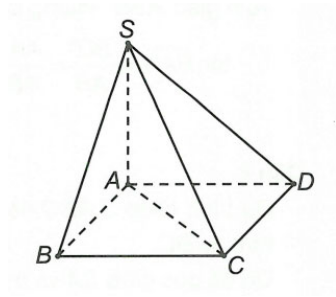
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Từ giả thiết ta có $SA \perp (ABCD)$

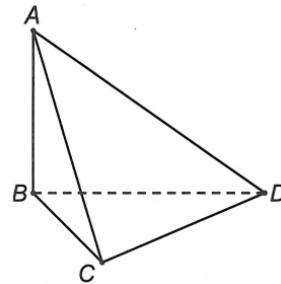
Suy ra AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó $\widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$.

**Câu 2.**

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD)$.

Do đó $\widehat{(AC, (BCD))} = \widehat{(AC, BC)} = \widehat{ACB}$.

**Câu 3.**

Vì SA vuông góc với đáy nên:

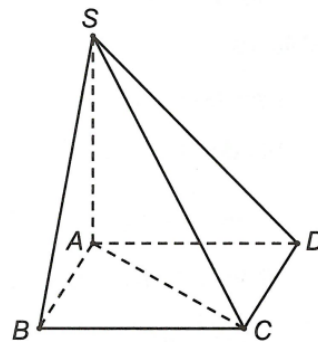
$\widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$.

Trong hình vuông $ABCD$ có $AC = a\sqrt{2}$.

Theo giả thiết, ta có $SA = \sqrt{2}a$.

Suy ra ΔSAC vuông cân tại A .

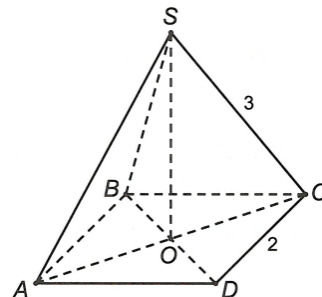
Vậy $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

**Câu 4.**

Ta có $\widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, OC)} = \widehat{SCO}$.

Xét tam giác vuông SCO có:

$$\cos \widehat{SCO} = \frac{OC}{SC} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \widehat{SCO} \approx 61^\circ 52'.$$

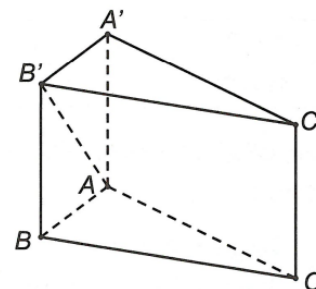
**Câu 5.**

Vì $BB' \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của AB' trên (ABC) .

Suy ra $\widehat{(AB', (ABC))} = \widehat{(AB', AB)} = \widehat{B'AB}$.

Tam giác ABB' vuông tại B nên:

$$\tan \widehat{B'AB} = \frac{BB'}{AB} = \frac{AA'}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{B'AB} = 60^\circ.$$

**Câu 6.**

Do hình chóp $S.ABC$ đều nên ta có $SG \perp (ABC)$ với G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SAG}$.

Gọi F là trung điểm của BC ta có $AF = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $AG = \frac{2}{3} AF = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle SAG$ vuông tại G ta có:

$$\cos \widehat{SAG} = \frac{AG}{SA} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SAG} = 30^\circ.$$

Vậy góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là 30° .

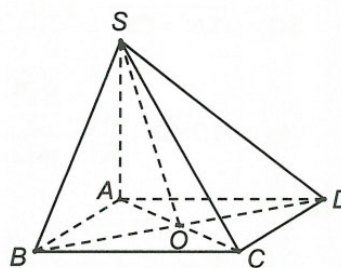
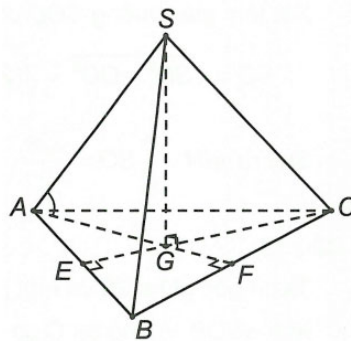
Câu 7.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ nên góc α là $\widehat{CSB}$.

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{BC}{SB} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow SB = \frac{5a}{\sqrt{10}} \Rightarrow SA = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Góc giữa SO và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$.

$$\text{Ta có } \tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = \frac{a\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 60^\circ.$$

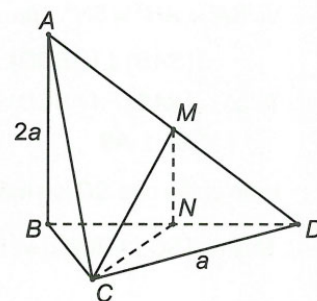


Câu 8.

Dựng $MN \parallel AB$ ($N \in BD$), do $AB \perp (BCD)$ và M là trung điểm của AD nên $MN \perp (BCD)$ và N là trung điểm của DB .

Suy ra CN là hình chiếu vuông góc của CM trên mặt phẳng (BCD) . Vậy góc giữa CM và mặt phẳng (BCD) là góc giữa hai đường thẳng CN và CM .

$$\text{Ta có: } \tan(\widehat{CM, CN}) = \tan \widehat{MCN} = \frac{MN}{CN} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



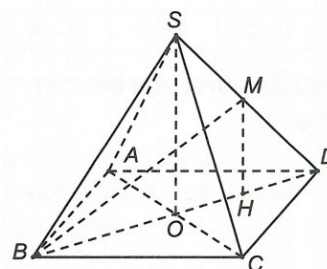
Câu 9.

Gọi $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Gọi H là trung điểm của OD .

Xét $\triangle SOD$ có MH là đường trung bình nên $MH \parallel SO$.

Suy ra $MH \perp (ABCD)$.



Hình chiếu của đường thẳng BM trên mặt phẳng $(ABCD)$ là BH .

Suy ra $\widehat{(BM, (ABCD))} = \widehat{(BM, BH)} = \widehat{MBH}$ ($\widehat{MBH}$ là góc nhọn).

Xét tam giác vuông ABD có:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{2}a.$$

$$\Rightarrow BH = \frac{3}{4}BD = \frac{3\sqrt{2}a}{2} \text{ và } OD = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2}a.$$

Xét tam giác vuông SOD có:

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{(2a)^2 - (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{2}a.$$

$$\text{Suy ra } MH = \frac{1}{2}SO = \frac{\sqrt{2}a}{2}. \text{ Ta có } \tan \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}a}{2}} = \frac{1}{3}.$$

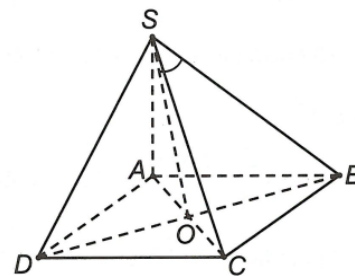
Câu 10.

Ta có góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) là góc $\widehat{BSO}$.

Xét $\triangle SOB$ vuông tại O có

$$SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}, SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \cos \widehat{BSO} = \frac{SO}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BSO} = 30^\circ.$$



Câu 11.

$$SH = HC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

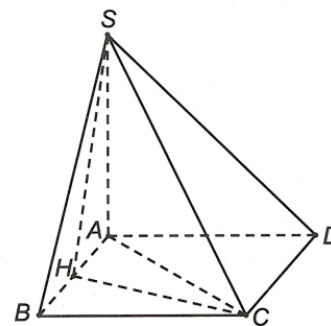
$$\text{Vì } SA = AB = a \Rightarrow AH = \frac{a}{2}.$$

Vì $SA^2 + AH^2 = SH^2$ nên $\triangle SAB$ vuông cân tại A hay $SA \perp AB$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SA \perp (ABCD). \\ SA \perp AB \end{cases}$$

Hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ là AC .

$$\text{Suy ra } \widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA} \Rightarrow \tan \alpha = \tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Dạng 3. Góc giữa hai mặt phẳng

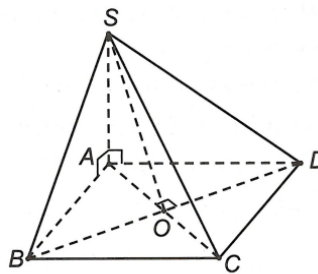
1- C	2- B	3- A	4- A	5- C	6- C	7- A	8- D	9- B	
------	------	------	------	------	------	------	------	------	--

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có:
$$\begin{cases} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ AB \perp AD, AB \subset (ABCD) \Rightarrow \overline{((SAD), (ABCD))} = \widehat{SAB}. \\ SA \perp AD, SA \subset (SAD) \end{cases}$$

Vậy đáp án C sai.



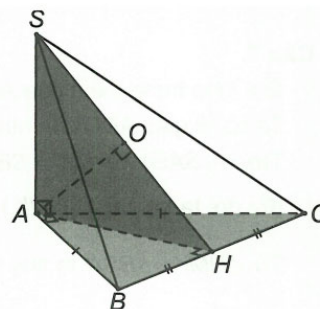
Câu 2.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ (SAC) \perp (ABC) \\ (SAB) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC).$$

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$ mà $BC \perp SA$
 $\Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$.

Khi đó O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) .

Suy ra $O \in SH$ và $\overline{((SBC), (ABC))} = \widehat{SHA} \Rightarrow$ D sai.



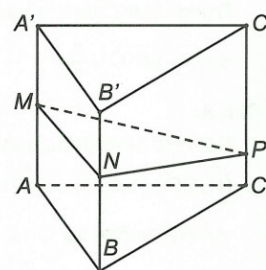
Câu 3.

Có ΔABC là hình chiếu của ΔMNP lên mặt phẳng (ABC) .

Theo công thức diện tích hình chiếu có $S' = S \cos \varphi$ với

$$S' = S_{ABC}; S = S_{MNP} \text{ và } \varphi = \overline{((ABC); (MNP))}.$$

$$\text{Suy ra } \cos \varphi = \frac{S'}{S} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } \varphi = 60^\circ.$$



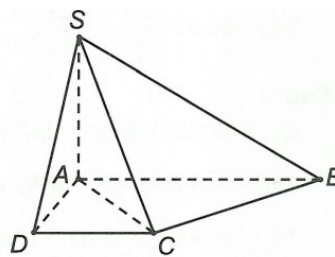
Câu 4.

Ta có $(SBC) \cap (ABCD) = BC$.

Dễ dàng chứng minh được: $AC \perp BC$.

$$\Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \overline{((SBC), (ABCD))} = \widehat{SCA}.$$

$$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

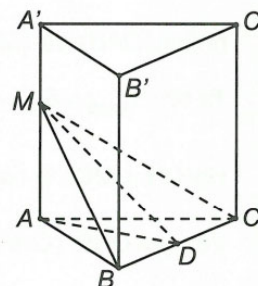


Câu 5.

Gọi D là trung điểm của BC .

Ta có $(MBC) \cap (ABC) = BC$;

$$BC \perp AD; BC \perp AM \Rightarrow BC \perp (AMD).$$



Do đó $\alpha = \widehat{((MBC), (ABC))} = \widehat{(DM, AD)} = \widehat{MDA}$.

Vì tam giác MAD vuông tại A nên $\tan \alpha = \frac{AM}{AD} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6.

Gọi M là trung điểm của BC , suy ra $AM \perp BC$ (vì $\triangle ABC$ đều).

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC , suy ra $SO \perp (ABC)$ và $SO = a$.

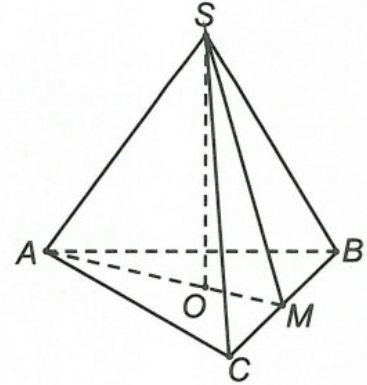
Khi đó góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) là góc $\widehat{SMO}$.

Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO \cdot S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{3V_{S.ABC}}{SO} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{a} = 3\sqrt{3}a^2$.

Mặt khác $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2 = 3\sqrt{3}a^2 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}a$.

Xét $\triangle ABC$ có $OM = \frac{1}{3} AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3}a = a$.

Xét $\triangle SOM$ vuông tại O nên $\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SMO} = 45^\circ$.



Câu 7.

Gọi M là trung điểm của AB .

Ta có tứ giác $ADCM$ là hình vuông và $CM \perp (SAB)$. Trong (SAB) kẻ $MK \perp SB$ tại K .

Khi đó, ta có $SB \perp (CMK)$ nên $\widehat{((SAB), (SBC))} = \widehat{MKC}$.

Từ $\triangle BMK \sim \triangle BSA$ ta suy ra $MK = \frac{SA \cdot BM}{SB} \Leftrightarrow MK = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Trong $\triangle MKC$ vuông tại M có $\tan \widehat{MKC} = \frac{MC}{MK} = \sqrt{3}$.

Suy ra $\widehat{MKC} = \frac{\pi}{3}$.

Câu 8.

Gọi H là hình chiếu của O trên cạnh SC ta có

$\widehat{((SDC), (SAC))} = \widehat{OHD} = \alpha$.

$\triangle OHD$ vuông tại O và $OD = a$; $OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $DH = \frac{\sqrt{7}a}{2}$.

Vậy $\cos \alpha = \frac{OH}{DH} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

