

CHUYÊN ĐỀ VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN
BÀI GIẢNG VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

- + Trình bày được các tính chất, quy tắc biểu diễn vector.
- + Phát biểu được tích vô hướng của hai vector, góc giữa hai đường thẳng.

❖ **Kĩ năng**

- + Chứng minh được các đẳng thức vector, biểu diễn được vector theo các vector không trùng phương với nó.
- + Nắm được phương pháp chứng minh sự cùng phương của hai vector, tìm được điều kiện của ba vector đồng phẳng.
- + Tính được góc giữa hai đường thẳng. Vận dụng được tích vô hướng của hai vector để giải các bài toán.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

A. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Các định nghĩa

- a) Vectơ là một đoạn thẳng có hướng (có phân biệt điểm đầu và điểm cuối).
- +) Ký hiệu vectơ: $\overrightarrow{AB}$ (điểm đầu là A , điểm cuối là B) hay $\vec{a}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$
- +) Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
- +) Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

b) Vectơ – không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

c) Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

d) Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.

e) Hai vectơ bằng nhau là hai vectơ cùng hướng và có cùng độ dài.

f) Hai vectơ đối nhau là hai vectơ ngược hướng nhưng có cùng độ dài.

Sự cùng phương của hai vectơ

• $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b}$$

• $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng hướng

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^+ : \vec{a} = k\vec{b}$$

• $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ ngược hướng

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^- : \vec{a} = k\vec{b}$$

• Ba điểm A, B, C thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$$

Các quy tắc tính toán với vectơ

g) Quy tắc ba điểm (với phép cộng)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

h) Quy tắc ba điểm (với phép trừ)

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

i) Quy tắc hình bình hành

Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

j) Quy tắc hình hộp. Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp thì

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$$

k) Phép nhân một số k với một vectơ $\vec{a}$.

Ta có $k\vec{a}$ là một vectơ được xác định như sau.

+ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \geq 0$.

Quy tắc ba điểm (mở rộng).

$$\overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} + \dots + \overrightarrow{X_{n-1}X_n} + \overrightarrow{X_nB} = \overrightarrow{AB}.$$

+ ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

+ có độ dài $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

Một số hệ thức vector hay dùng

l) Hệ thức về trung điểm của đoạn thẳng

I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

$\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OI}$ (với O là một điểm bất kỳ).

m) Hệ thức về trọng tâm của tam giác

G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$ (với O là một điểm bất kỳ)

$\Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AM}$ (với M là trung điểm cạnh BC).

n) Hệ thức về trọng tâm của tứ diện

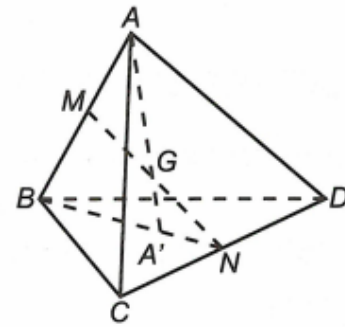
G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$

$\Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 4\vec{OG}$ (với điểm O bất kỳ)

$\Leftrightarrow \vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AA'}$ (với A' là trọng tâm của ΔBCD)

$\Leftrightarrow \vec{GM} + \vec{GN} = \vec{0}$ (với M, N là trung điểm một cặp cạnh đối diện).



Sự đồng phẳng của ba vector

o) Định nghĩa

Trong không gian, ba vector được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng nào đó.

p) Điều kiện để ba vector đồng phẳng

Trong không gian cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương và vector $\vec{c}$.

Khi đó, $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số $(m; n)$ sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ (cặp số $(m; n)$ nêu trên là duy nhất)

q) Phân tích một vector theo ba vector không đồng phẳng

Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ không đồng phẳng.

Với mọi vector $\vec{x}$, ta đều tìm được duy nhất một bộ số

Hệ quả

Nếu có một mặt phẳng chứa vector này đồng thời song song với giá của hai vector kia thì ba vector đó đồng phẳng.

Ứng dụng:

Bốn điểm phân biệt A, B, C, D đồng phẳng

$$\Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$$

$$\text{đồng phẳng} \Leftrightarrow \vec{AB} = m\vec{AC} + n\vec{AD}$$

Chú ý:

$(m; n; p)$ sao cho $\vec{x} = m.\vec{a} + n.\vec{b} + p.\vec{c}$

Tích vô hướng của hai vector

- a) Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$
- b) Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì $\vec{a}.\vec{b} = 0$

Một số ứng dụng của tích vô hướng

- a) Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$
- b) Công thức tính cosin của góc hợp bởi hai vector khác $\vec{0}$.

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

- c) Công thức tính độ dài của một đoạn thẳng

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{AB^2}$$

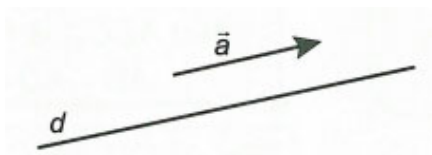
B. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Góc giữa hai vector trong không gian

Định nghĩa: Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vector khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó ta gọi $\widehat{BAC} (0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ)$ là góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong không gian, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$

Vector chỉ phương của đường thẳng

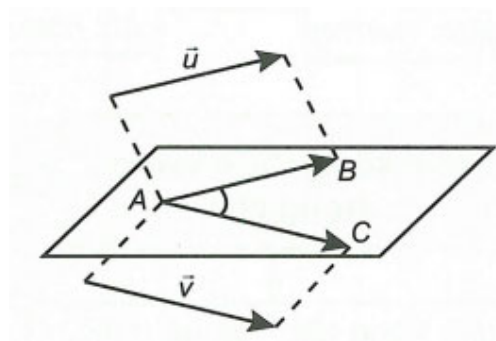
Vector $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ được gọi là vector chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vector $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d .



Góc giữa hai đường thẳng

Bình phương vô hướng của một vector:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$



Nhận xét:

- a) Nếu $\vec{a}$ là vector chỉ phương của đường thẳng d thì vector $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là vector chỉ phương của d .
- b) Một đường thẳng trong không gian hoàn toàn xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vector chỉ phương $\vec{a}$ của nó.
- c) Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vector chỉ phương cùng phương.

Chú ý. Giả sử $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt là vector chỉ phương của đường thẳng a và b .

Đặt $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$.

$$\text{Khi đó } (\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} \alpha & \text{khi } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \\ 180^\circ - \alpha & \text{khi } 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ \end{cases}$$

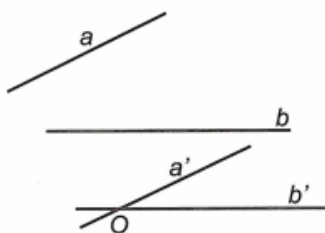
+) Nếu $a // b$ hoặc $a \equiv b$ thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.

+) $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 90^\circ$.

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc

giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và **Nhận xét**

lần lượt song song với a và b .



a) Nếu hai đường thẳng a, b lần lượt có các vector chỉ phương $\vec{u}, \vec{v}$ thì

$$a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

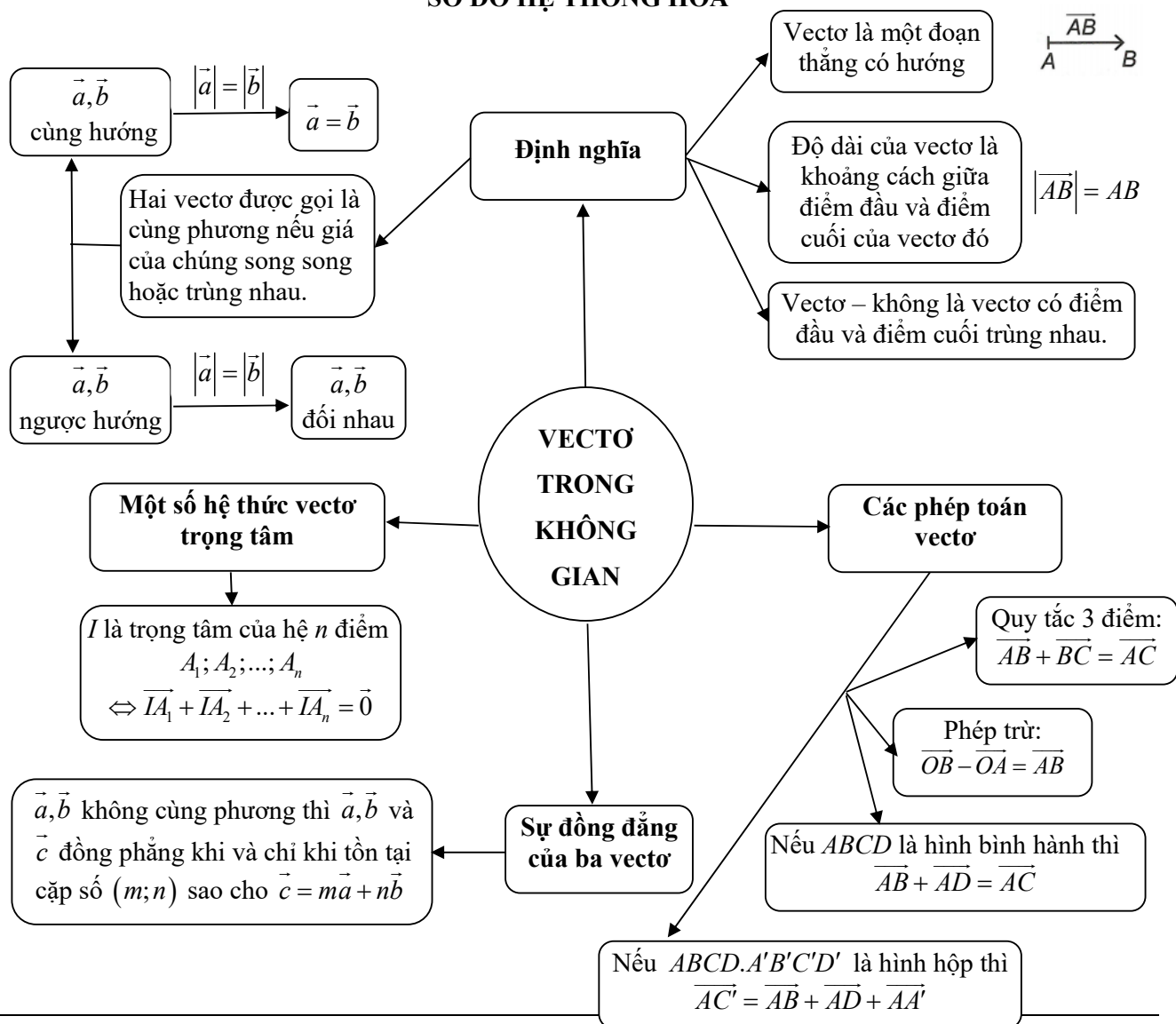
$$b) \begin{cases} a \parallel b \\ c \perp a \end{cases} \Rightarrow c \perp b$$

Hai đường thẳng vuông góc

Định nghĩa: Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Kí hiệu: Đường thẳng a và b vuông góc với nhau kí hiệu là $a \perp b$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Vector trong không gian

Bài toán 1. Xác định vector và chứng minh đẳng thức vector

Phương pháp giải

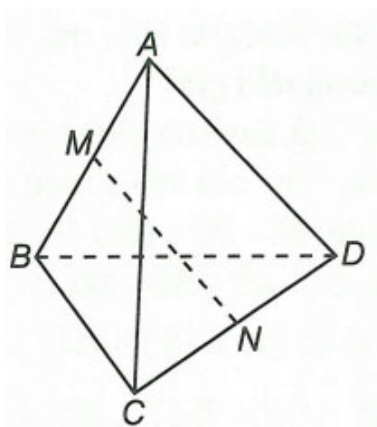
Vận dụng các kiến thức sau.

- Định nghĩa các khái niệm liên quan đến vector;
- Tính chất hình học của các đa giác đã học;
- Các quy tắc tính toán với vector;
- Một số hệ thức vector hay dùng;
- Các tính chất của các hình hình học cụ thể.

Ví dụ. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$$

Hướng dẫn giải



Ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \text{ (đẳng thức này đúng).}$$

Do M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD

$$\text{nên } \begin{cases} \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0} \\ \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND})$$

$$= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND}) + 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MN}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Sử dụng các đỉnh của hình hộp làm điểm đầu và điểm cuối của vector.

- Hãy kể tên các vector bằng nhau lần lượt bằng các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$.
- Hãy kể tên các vector luôn có độ dài bằng nhau và bằng độ dài của vector $\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có

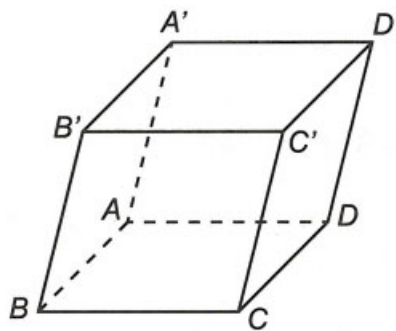
$$+) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}.$$

$$+) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}.$$

$$+) \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$$

$$+) \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$$

b) Từ tính chất của hình bình hành, ta suy ra các vector luôn có độ dài bằng độ dài của vector $\overrightarrow{BC}$ là $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'B'}$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Chứng minh $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

b) Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật thì $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$

Hướng dẫn giải

a) Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ thì O là trung điểm của mỗi đường chéo AC và BD .

$$\text{Do đó } \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \text{ và } \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$$

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{SA}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{SC}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OC}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$$

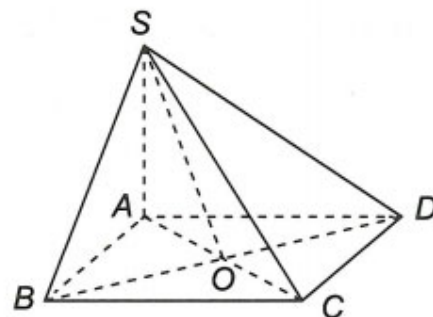
$$= 2(\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2) \text{ (vì } \overrightarrow{OA} \text{ và } \overrightarrow{OC} \text{ là hai vector đối nhau nên } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0})$$

$$= 2(\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2)$$

$$\text{Tương tự. } \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2 = 2(\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OB}^2)$$

Mà $ABCD$ là hình chữ nhật nên $OA = OB$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$$



Bài toán 2. Chứng minh ba vector đồng phẳng, ba điểm thẳng hàng

Phương pháp giải

- Chứng minh ba vector đồng phẳng, sử dụng một trong các cách sau.
- + Chứng minh ba vector có giá cùng song song với một mặt phẳng.
- + Chứng minh hai vector có giá cùng song song với mặt phẳng chứa giá của vector còn lại.
- + Biến đổi vector để được đẳng thức dạng $\vec{c} = m.\vec{a} + n.\vec{b}$

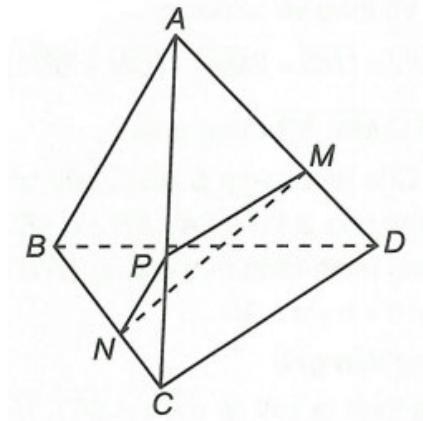
- Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : k.\overrightarrow{MA} + (1-k).\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$$

Ví dụ. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là các điểm trên các cạnh AD và BC sao cho $AM = 2MD, BC = 3NC$. Chứng minh ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ 2\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}) \end{cases}$$

$$\text{Cộng vế theo vế của hai đẳng thức này ta được } 3\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC})$$

$$\text{Do } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MD} = \vec{0}, \overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{CN} = \vec{0} \text{ nên } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

Vậy $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

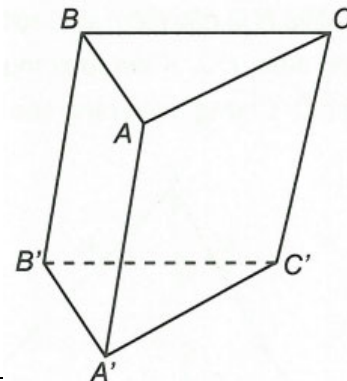
Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích các vector $\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BC'}$ qua các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

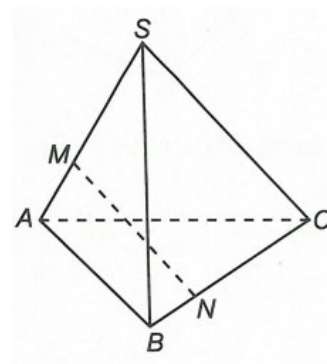
Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NB}$. Chứng minh rằng ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.



Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}; \overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{NB} = \vec{0}$

$$\text{Lại có } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} \\ 2\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được

$$3\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{NB}) + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB}$$

Vậy $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = a.SA', SB = b.SB', SC = c.SC'$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $a + b + c = 3$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta suy ra $\overrightarrow{SA} = a.\overrightarrow{SA'}, \overrightarrow{SB} = b.\overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{SC} = c.\overrightarrow{SC'}$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ΔABC . Ta có $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG}$

$$G \in (A'B'C') \Leftrightarrow \overrightarrow{SG} = x.\overrightarrow{SA'} + y.\overrightarrow{SB'} + z.\overrightarrow{SC'} \text{ với } x + y + z = 1$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{SG} = 3x.\overrightarrow{SA'} + 3y.\overrightarrow{SB'} + 3z.\overrightarrow{SC'} \text{ với } x + y + z = 1$$

$$\Leftrightarrow a.\overrightarrow{SA'} + b.\overrightarrow{SB'} + c.\overrightarrow{SC'} = 3x.\overrightarrow{SA'} + 3y.\overrightarrow{SB'} + 3z.\overrightarrow{SC'}$$

$$\Leftrightarrow (a - 3x).\overrightarrow{SA'} + (b - 3y).\overrightarrow{SB'} + (c - 3z).\overrightarrow{SC'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a - 3x = b - 3y = c - 3z = 0 \text{ (do } \overrightarrow{SA'}, \overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{SC'} \text{ không đồng phẳng)}$$

+) Nếu $G \in (A'B'C')$ ta có $a - 3x = b - 3y = c - 3z = 0$ (với $x + y + z = 1$).

Do đó $a + b + c = 3$

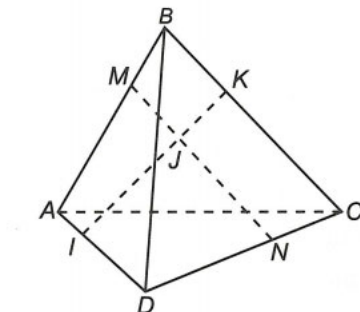
+) Nếu $a + b + c = 3$, ta đặt $x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}, z = \frac{c}{3}$ thì

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{3} = 1 \text{ và } a - 3x = b - 3y = c - 3z = 0$$

Do đó $G \in (A'B'C')$.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$, M và N là các điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$; các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}$, $\overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



Ta có $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ nên với điểm O bất kỳ thì $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}$

Tương tự, ta chỉ ra được

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OC}}{3}, \overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OD}}{1-k}, \overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC}}{1-k}, \overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{ON}}{1-k}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OD} - 2k\overrightarrow{OC})$$

$$= \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{3} [(1-k)\overrightarrow{OI} + 2(1-k)\overrightarrow{OK}]$$

$$= \frac{1}{3} (\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OK}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{OI} + \frac{2}{3} \overrightarrow{OK}$$

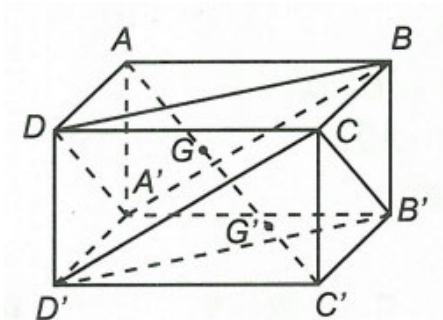
$$\text{Suy ra } \frac{1}{3} (\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}) + \frac{2}{3} (\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OJ}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \overrightarrow{JI} + \frac{2}{3} \overrightarrow{JK} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{JK}$$

Suy ra I, J, K thẳng hàng.

Ví dụ 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác $BDA', CB'D'$.

Chứng minh các điểm A, G, G', C' thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



$$\text{Đặt } \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$$

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (quy tắc hình hộp).

$$\text{Theo quy tắc trọng tâm, ta có } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Vậy $\overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG'}$ nên các điểm A, G, G', C' thẳng hàng.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho bốn vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ bất kỳ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a} = \vec{b}$ và $\vec{c} = \vec{d} \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$

B. $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} = \pm \vec{b}$

C. $\vec{a} - \vec{c} = \vec{b} - \vec{d} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$

D. $\vec{a} = -\vec{b}$ và $\vec{c} = -\vec{d} \Rightarrow \vec{a} - \vec{d} = \vec{c} - \vec{b}$

Câu 2: Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Cho các khẳng định sau.

- (1) Nếu các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thuộc một mặt phẳng nào đó.
- (2) Nếu các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng phương.
- (3) Nếu tồn tại hai số thực m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ thì các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- (4) Nếu các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì giá của chúng song song với mặt phẳng nào đó.

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

Câu 3: Cho tam giác ABC có diện tích S . Giá trị nào của k thích hợp thỏa mãn

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - 2k(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} ?$$

A. $k = \frac{1}{4}$

B. $k = \frac{1}{2}$

C. $k = \frac{1}{2}$

D. $k = 1$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Hãy chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$

Câu 5: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$.

B. Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$.

C. Nếu $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ thì bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

D. Nếu $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm của đoạn AC .

Câu 6: Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

A. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 7: Cho $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$, góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° . Khẳng định nào **sai** trong các khẳng định sau?

A. $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

B. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$

C. $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 9$

D. $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{139}$

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$, O là trọng tâm tam giác BCD , M là trung điểm của AD . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AD}$

B. $\vec{OM} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AD}$

C. $\vec{OM} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AD}$

D. $\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{6}\vec{AD}$

Câu 9: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n là duy nhất.

B. Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong ba số m, n, p khác 0 thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

C. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ đó cùng có giá thuộc một mặt phẳng.

D. Ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một thì ba tia đó không đồng phẳng.

Câu 10: Cho 2 điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{OM} = \vec{OB} = k\vec{BA}$.

B. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{OM} = \vec{OB} = k(\vec{OB} - \vec{OA})$.

C. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{OM} = k\vec{OA} + (1-k)\vec{OB}$.

D. Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Giá trị $\vec{AB} \cdot \vec{C'A'}$ bằng

A. $-a^2$

B. $-a^2\sqrt{2}$

C. $a^2\sqrt{2}$

D. a^2

Câu 12: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Ba vectơ đồng phẳng là ba vectơ cùng nằm trong một mặt phẳng.

B. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ với m, n là các số duy nhất.

C. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng khi có $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là vectơ bất kì.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Câu 13: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Vì $\vec{NM} + \vec{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP .

B. Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.

C. Từ hệ thức $\vec{AB} = 2\vec{AC} - 8\vec{AD}$ ta suy ra ba vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ đồng phẳng.

D. Vì $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 14: Trong không gian cho ba điểm A, B, C bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - 2AC^2)$

B. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2)$

C. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = BA^2 + BC^2 - AC^2$

D. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = BA^2 + BC^2 - 2AC^2$

Câu 15: Cho tứ diện $SABC$. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của SA , N là điểm trên cạnh BC sao cho $NC = 3NB$. Phân tích vector $\overrightarrow{MN}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ ta được

A. $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

C. $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 2NC$. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng MN . Biểu diễn vector $\overrightarrow{AO}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ ta có

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$

C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

D. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

Câu 17: Trong không gian cho tam giác ABC . Tìm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. M là trọng tâm tam giác ABC .

B. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

C. M là trực tâm tam giác ABC .

D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Chọn khẳng định đúng?

A. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$

B. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$

C. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 6(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$

D. $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$

Câu 19: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}, \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Xét hai mệnh đề

(I) $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

(II) $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (II).

C. Không có.

D. Cả (I) và (II).

Câu 20: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}, \vec{b} = \overrightarrow{AB}, \vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vector $\overrightarrow{AG'}$ bằng

A. $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$

B. $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

C. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$

D. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

Câu 21: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA'} = k.\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NC'} = l.\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k - l = -\frac{3}{2}$

B. $k + l = -3$

C. $k + l = -4$

D. $k + l = -2$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD . Giá trị $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

- A. $\frac{a^2}{2}$ B. $-\frac{a^2}{2}$ C. $\frac{a^2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$ và các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, SC . Các điểm P, Q trên các đường thẳng SA, BN sao cho $PQ // CM$. Biểu diễn vector $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ được kết quả

- A. $\overrightarrow{PQ} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{c}$ B. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$
C. $\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{4}{3}\vec{c}$ D. $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$

Câu 24: Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trong một mặt phẳng.
B. $ABCD$ là một tứ diện $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$ không đồng phẳng.
C. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng chỉ khi giá của chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
D. Ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng khi và chỉ khi trong ba vector đó, vector này không thể biểu diễn được theo hai vector kia.

Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Giá trị AG^2 bằng

- A. a^2 B. $\frac{2a^2}{3}$ C. $3a^2$ D. $\frac{a^2}{3}$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Xét hai mệnh đề

(I). Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

(II). Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Mệnh đề nào đúng?

- A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Không có. D. Cả (I) và (II).

Câu 27: Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a, BC = a\sqrt{2}$. Tích vô hướng giữa $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$ bằng

- A. $-\frac{a^2}{2}$ B. $\frac{a^2}{2}$ C. a^2 D. $-a^2$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$. Xét hai mệnh đề

(I) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

(II) Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Mệnh đề nào đúng?

- A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Không có. D. Cả (I) và (II).

Câu 29: Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. xét các vector $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

B. Hai vector $\vec{x}, \vec{a}$ cùng phương.

C. Hai vector $\vec{x}, \vec{b}$ cùng phương.

D. Ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Câu 30: Cho ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Các vector $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}, \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}, \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. Các vector $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}, \vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}, \vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. Các vector $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}, \vec{z} = -\vec{a} - 4\vec{b}$ đồng phẳng.

D. Các vector $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}, \vec{z} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 31: Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng?

Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Giá trị của $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng

A. a^2

B. $a^2\sqrt{2}$

C. $a^2\sqrt{3}$

D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Câu 32: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $|\overrightarrow{AC'}| = a\sqrt{3}$

B. $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = a^2$

C. $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$

D. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = \vec{0}$

Câu 33: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của $BB', A'C'$. Điểm M thuộc cạnh $B'C'$ sao cho $\overrightarrow{MB'} = k\overrightarrow{MC'}$. Tìm k để bốn điểm A, I, M, K đồng phẳng.

A. $k = -1$

B. $k = -\frac{3}{2}$

C. $k = -\frac{1}{2}$

D. $k = -3$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là điểm thay đổi trên SO . Tỉ số $\frac{SM}{SO}$

sao cho biểu thức $P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ nhỏ nhất bằng

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{5}$

Câu 35: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Cho $AB = 2a, CD = 2b, EF = 2c$. Với M là một điểm tùy ý, tổng $MA^2 + MB^2$ bằng

A. $2MF^2 + 2b^2$

B. $2ME^2 + 2a^2$

C. $2MF^2 + 2a^2$

D. $2ME^2 + 2b^2$

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{NB} = k\overrightarrow{NC}$. Tìm k để ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

A. $k = -2$

B. $k = \frac{1}{2}$

C. $k = 2$

D. $k = -\frac{1}{2}$

Câu 37: Cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho $BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q . Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$.

A. $\frac{AQ}{AD} = \frac{5}{2}$

B. $\frac{AQ}{AD} = \frac{3}{5}$

C. $\frac{AQ}{AD} = \frac{2}{5}$

D. $\frac{AQ}{AD} = \frac{5}{3}$

Câu 38: Trong không gian xét $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}, \vec{q}$ là các vector có độ dài bằng 1. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = |\vec{m} - \vec{n}|^2 + |\vec{m} - \vec{p}|^2 + |\vec{m} - \vec{q}|^2 + |\vec{n} - \vec{p}|^2 + |\vec{n} - \vec{q}|^2 + |\vec{p} - \vec{q}|^2$ là

A. 16.

B. 6.

C. 25.

D. 8.

Dạng 2. Hai đường thẳng vuông góc

Bài toán 1. Tính góc giữa hai đường thẳng (chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong hình lăng trụ và hình hộp)

Phương pháp giải

- Để tính số đo của góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ta có thể thực hiện tính thông qua góc giữa hai vector chỉ phương của đường thẳng đó.

$$+) \cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \right| = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right|$$

+) Định lý cosin trong tam giác

- Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau, ta thường chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

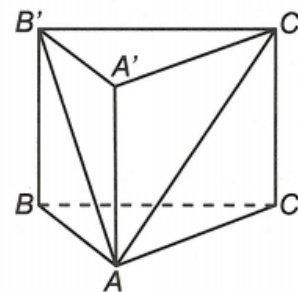
Bước 1. Sử dụng tính chất sau:

$$\begin{cases} (d_1, d_2) = \alpha \\ d_2 // d_3 \end{cases} \Rightarrow (d_1, d_2) = (d_1, d_3) = \alpha$$

Bước 2. Áp dụng định lý cosin trong tam giác để xác định góc.

Ví dụ. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC .

Hướng dẫn giải



Ta có $BC // B'C' \Rightarrow (\widehat{AB', BC}) = (\widehat{AB', B'C'})$

Xét $\triangle AB'C'$ có $AB' = AC' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{3}$

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle ABC$, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$$

$$= a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = 3a^2$$

$$\Rightarrow BC = B'C' = a\sqrt{3}$$

Suy ra $\triangle AB'C'$ đều, do đó

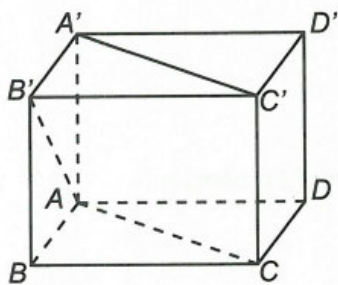
$$(\widehat{AB', BC}) = (\widehat{AB', B'C'}) = \widehat{AB'C'} = 60^\circ$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa 2 đường thẳng

- AB và $B'C'$
- AC và $B'C'$
- $A'C'$ và $B'C$

Hướng dẫn giải



a) Ta có $AB \parallel A'B'$ mà $(A'B', B'C') = 90^\circ$ nên $(AB, B'C') = 90^\circ$

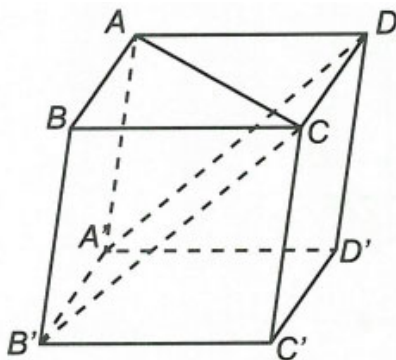
b) Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $(AC, BC) = 45^\circ$.

Ta có $BC \parallel B'C'$ nên $(AC, B'C') = 45^\circ$

c) Ta có $AC \parallel A'C'$ và $\triangle ACB'$ là tam giác đều vì có các cạnh đều bằng đường chéo của các hình vuông bằng nhau. Do đó $(A'C', B'C) = (AC, B'C) = 60^\circ$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^\circ$. Chứng minh tứ giác $A'B'CD$ là hình vuông.

Hướng dẫn giải



Ta có tứ giác $A'B'CD$ là hình bình hành (tính chất hình hộp).

Do $\widehat{B'BC} = 60^\circ$ nên $\triangle BB'C$ đều. Suy ra $B'C = a$.

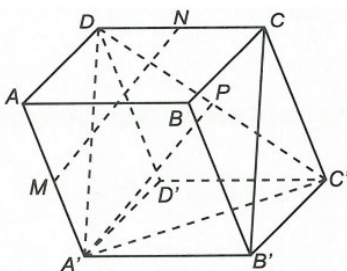
Do đó $CD = B'C = a$ nên $A'B'CD$ là hình thoi.

Ta có $\overrightarrow{CB'} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BA} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$.

Suy ra $CB' \perp CD$. Vậy tứ giác $A'B'CD$ là hình vuông.

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $BAD, DAA', A'AB$ đều bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD . Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, tính giá trị của $\cos \alpha$.

Hướng dẫn giải



Ta có $\begin{cases} A'D // B'C \\ MN // A'P \end{cases}$ với P là trung điểm của DC' .

Suy ra $(\widehat{MN, B'C}) = (\widehat{A'P, A'D}) = \widehat{DA'P}$

Vì $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60^\circ$ và các cạnh của hình hộp bằng a .

Do đó $A'D = a, C'D = C'A' = a\sqrt{3}$.

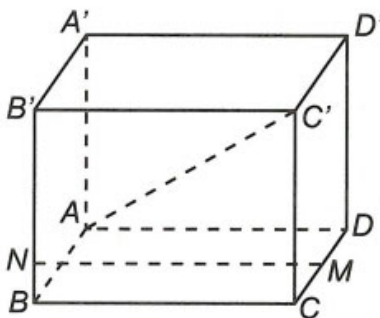
Suy ra $A'P = \frac{A'D^2 + A'C'^2}{2} - \frac{DC'^2}{4} \Rightarrow A'P = \frac{\sqrt{5}a}{2}$.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác $A'DP$, ta có

$$\cos \alpha = \frac{A'D^2 + A'P^2 - DP^2}{2A'D \cdot A'P} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Ví dụ 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Trên các cạnh CD và BB' ta lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $DM = BN = x$ với $0 \leq x \leq a$. Chứng minh rằng $AC' \perp MN$.

Hướng dẫn giải



Ta đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB'} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Ta có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ hay $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Mặt khác

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM})$ với $\overrightarrow{BN} = \frac{x}{a} \vec{a}$ và $\overrightarrow{DM} = \frac{x}{a} \vec{b}$

Do đó $\overrightarrow{MN} = \left(\vec{b} + \frac{x}{a} \vec{a} \right) - \left(\vec{c} + \frac{x}{a} \vec{b} \right) = \frac{x}{a} \vec{a} + \left(a - \frac{x}{a} \right) \vec{b} - \vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \left[\frac{x}{a} \vec{a} + \left(a - \frac{x}{a} \right) \vec{b} - \vec{c} \right]$

Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ nên ta có

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{x}{a} \vec{a}^2 + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \vec{b}^2 - \vec{c}^2 = x \cdot a + \left(1 - \frac{x}{a}\right) a^2 - a^2 = 0$$

Vậy $AC' \perp MN$.

Bài toán 2. Tính góc giữa hai đường thẳng (hai đường thẳng vuông góc) trong hình chóp

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$.

Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{AB}) &= \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} \\ &= \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{a \cdot a} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } BC^2 = 2a^2 = a^2 + a^2 = AC^2 + AB^2$$

Nên $\triangle ABC$ vuông tại A .

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

Mặt khác tam giác SAB đều nên $\widehat{(\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{AB})} = 120^\circ$.

$$\text{Do đó ta có } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = SA \cdot AB \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{AB}) = \frac{-\frac{a^2}{2}}{a^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } \widehat{(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{AB})} = 120^\circ$$

$$\text{Suy ra góc } \widehat{(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{AB})} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

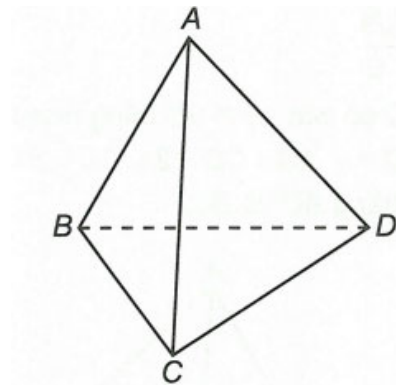
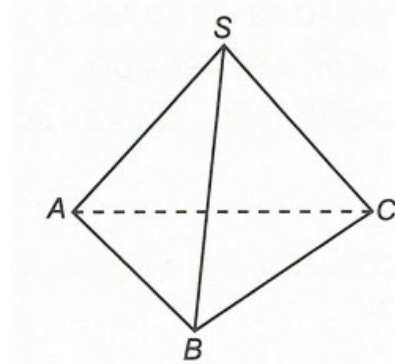
Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{b}$$

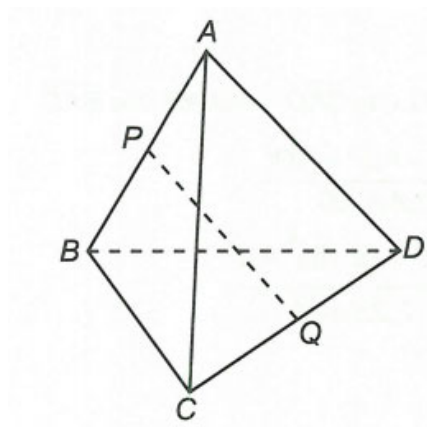
$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c} - \vec{b}|} \\ &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot a} = \frac{a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2}}{a^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} = 90^\circ$$



Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng $AB \perp PQ$.

Hướng dẫn giải



Vì $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}$

Do đó $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Hay $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Vậy $AB \perp PQ$.

Ví dụ 4. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a , M là trung điểm của cạnh BC . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DM .

Hướng dẫn giải

Gọi N là trung điểm AC thì $MN \parallel AB$.

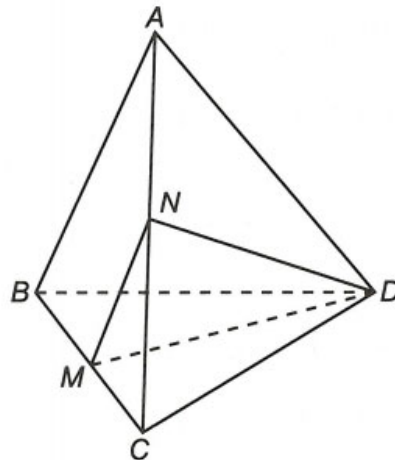
Suy ra $(\widehat{AB, DM}) = (\widehat{MN, DM})$.

Ta có $\cos \widehat{DMN} = \frac{MN^2 + DM^2 - DN^2}{2 \cdot MN \cdot DM}$

$$= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Suy ra $\widehat{DMN} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $(\widehat{AB, DM}) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$.

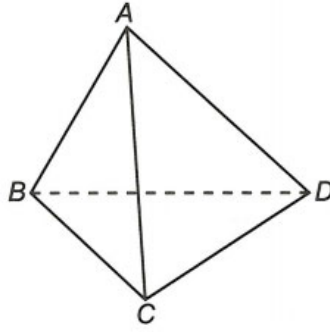


Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đối bằng nhau từng đôi một,

$AC = BD = a$, $AB = CD = 2a$, $AD = BC = a\sqrt{6}$.

Tính góc giữa hai đường thẳng AD và BC .

Hướng dẫn giải



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = AD \cdot AC \cdot \cos \widehat{CAD} - AD \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAD} \\
 &= AD \cdot AC \cdot \frac{AC^2 + AD^2 - CD^2}{2 \cdot AC \cdot AD} - AD \cdot AB \cdot \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} \\
 &= a\sqrt{6} \cdot a \cdot \frac{a^2 + (a\sqrt{6})^2 - (2a)^2}{2 \cdot a \cdot a\sqrt{6}} - a\sqrt{6} \cdot 2a \cdot \frac{(2a)^2 + (a\sqrt{6})^2 - a^2}{2 \cdot 2a \cdot a\sqrt{6}} \\
 &= -3a^2
 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}}{AD \cdot BC} = \frac{-3a^2}{a\sqrt{6} \cdot a\sqrt{6}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{AD, BC}) = 120^\circ$$

Vậy $(\widehat{AD, BC}) = 60^\circ$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , cạnh

$$AB = 2a, AD = DC = a; SA \perp AB, SA \perp AD \text{ và } SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

- Tính góc giữa đường thẳng SB và DC .
- Gọi α là góc giữa SD và BC . Tính $\cos \alpha$.

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Vì } DC \parallel AB \Rightarrow (\widehat{SB, DC}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}$$

(vì $\triangle SAB$ vuông tại A nên $\widehat{SBA} < 90^\circ$).

$$\text{Xét } \triangle SAB \text{ vuông tại } A, \text{ ta có } \tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 30^\circ$$

Vậy $(\widehat{SB, DC}) = \widehat{SBA} = 30^\circ$.

- Gọi E là trung điểm của AB .

Khi đó, $BCDE$ là hình bình hành nên $DE \parallel BC \Rightarrow (\widehat{SD, BC}) = (\widehat{SD, DE}) = \alpha$

$$\text{Ta có } \begin{cases} SE^2 = SD^2 = SA^2 + AD^2 = \frac{4a^2}{3} + a^2 = \frac{7a^2}{3} \\ DE^2 = 2a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SE = SD = a\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \\ DE = a\sqrt{2} \end{cases}$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác SDE , ta được

$$\cos \widehat{SDE} = \frac{SD^2 + DE^2 - SE^2}{2SD.DE} = \frac{2a^2}{2.a \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} . a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{42}}{14} > 0 \Rightarrow \widehat{SDE} < 90^\circ$$

$$\text{Vậy } (\widehat{SD, BC}) = (\widehat{SD, DE}) = \widehat{SDE} = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \cos \widehat{SDE} = \frac{\sqrt{42}}{14}.$$

Ví dụ 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = \frac{4}{3}AB$. Gọi G, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC, DB , biết

$$EF = \frac{5}{6}AB. \text{ Tính góc giữa } CD \text{ và } AB.$$

Hướng dẫn giải

Gọi G là trung điểm của BC .

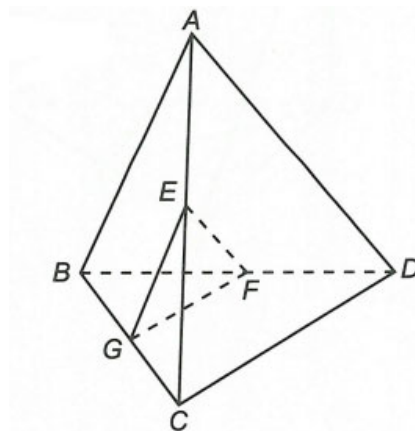
$$\text{Đặt } AB = a. \text{ Ta có } GE = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

$$GF = \frac{CD}{2} = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}; EF = \frac{5}{6}AB = \frac{5a}{6}.$$

$$\text{Từ đó } GE^2 + GF^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} = \frac{25a^2}{36} = EF^2$$

$\Rightarrow \triangle GEF$ vuông tại G .

$$\text{Vì } GE \parallel AB, GF \parallel CD \text{ nên } (\widehat{AB, CD}) = (\widehat{GE, GF}) = \widehat{EGF} = 90^\circ.$$



Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng a ; SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính cosin góc giữa SB và AC .

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của SD

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của $\triangle SBD$. Suy ra

$$\begin{cases} OI \parallel SB \\ OI = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \frac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a \end{cases}$$

$$\text{Vì } OI \parallel SB \Rightarrow (\widehat{SB, AC}) = (\widehat{OI, AC}) = \widehat{AOI}$$

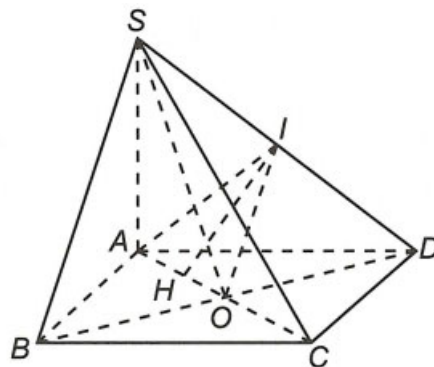
$$\text{Ta có } AI = \frac{SD}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a$$

$\Rightarrow AI = OI \Rightarrow \triangle AOI$ cân tại I .

$$\text{Gọi } H \text{ là trung điểm của } OA \Rightarrow IH \perp OA \text{ và } OH = \frac{OA}{2} = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

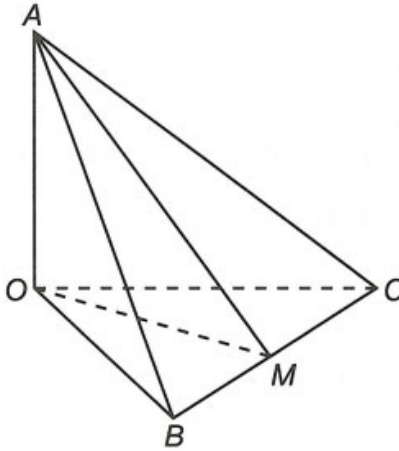
$$\text{Xét } \triangle OHI \text{ có } \cos \widehat{HOI} = \frac{OH}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{SB, AC}) = \cos \widehat{HOI} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



Ví dụ 9. Cho hình chóp tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = a, OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và OM .

Hướng dẫn giải



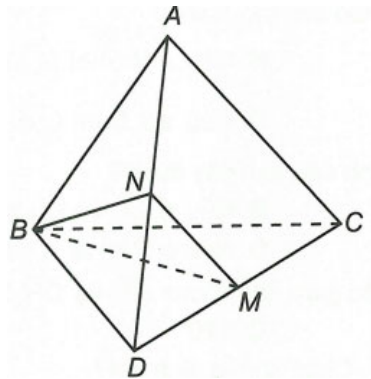
$$\text{Ta có } \begin{cases} AB = a\sqrt{2}, BC = a\sqrt{5} \\ OM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(OB^2 + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + 0 - 0 - 0) = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{AB, OM}) = \left| \cos(\widehat{AB, OM}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}|}{AB \cdot OM} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Ví dụ 10. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = a$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD . Tính độ dài cạnh AC để cosin góc giữa hai đường thẳng AC và BM bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải



Gọi N là trung điểm của AD . Ta có $(\widehat{BM, AC}) = (\widehat{BM, MN}) = \alpha$

Đặt $AC = 2x \Rightarrow MN = x > 0$

Theo bài ra ta có tam giác ABD đều cạnh a nên $BD = a, BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ACD vuông tại A nên $DC^2 = AD^2 + AC^2 = a^2 + 4x^2$

Xét tam giác ABC ta có $BC^2 = a^2 + 4x^2 - 2ax$

$$\text{Do đó } BM^2 = \frac{a^2 + a^2 + 4x^2 - 2ax}{2} - \frac{a^2 + 4x^2}{4} = \frac{3a^2 + 4x^2 - 4ax}{4}$$

$$\text{Ta tính } \cos \widehat{BMN} = \frac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2BM \cdot MN} = \frac{\frac{3a^2 + 4x^2 - 4ax}{4} + x^2 - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3a^2 + 4x^2 - 4ax}}{2} \cdot x}$$

$$= \frac{8x^2 - 4ax}{4x \cdot \sqrt{3a^2 + 4x^2 - 4ax}} = \frac{2x - a}{\sqrt{3a^2 + 4x^2 - 4ax}}$$

Theo giả thiết ta có

$$\cos \alpha = \left| \frac{2x - a}{\sqrt{3a^2 + 4x^2 - 4ax}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 8x^2 - 8ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

Do $x > 0$ nên $x = a \Rightarrow AC = 2x = 2a$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
- C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.
- D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

Câu 2: Cho hai đường thẳng a, b lần lượt có vector chỉ phương $\vec{u}, \vec{v}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Nếu $a \perp b$ thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- B. Nếu $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ thì $a \perp b$

$$\text{C. } \cos(a, b) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad \text{D. } \cos(a, b) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Câu 3: Cho ba đường thẳng a, b, c . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Nếu $a // b$ thì $(\widehat{a, c}) = (\widehat{c, b})$
- B. Nếu $c // b$ thì $(\widehat{a, b}) = (\widehat{a, c})$
- C. Nếu $a // c$ thì $(\widehat{a, c}) = 0^\circ$
- D. Nếu $a \perp b$ thì $(\widehat{a, c}) = (\widehat{c, b})$

Câu 4: Cho ba đường thẳng a, b, c . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a // b$
- B. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \perp c$
- C. Nếu $a \perp c$ và $b \perp c$ thì $a \perp b$
- D. Nếu $a // b$ và $c \perp b$ thì $c \perp a$

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$ là

- A. 45°
- B. 90°
- C. 120°
- D. 60°

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định **sai**?

- A. Góc giữa AC và $B'D'$ bằng 90° B. Góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60°
C. Góc giữa AD và $B'C$ bằng 45° D. Góc giữa BD và $A'C'$ bằng 90°

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 120°

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

- A. 0° B. 30° C. 90° D. 60°

Câu 9: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$ bằng.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt là hình thoi và các góc đỉnh A bằng 60° . Góc giữa hai đường thẳng BD và AC' bằng

- A. 90° B. 30° C. 45° D. 60°

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn khẳng định đúng.

- A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$ B. $\varphi = 60^\circ$ C. $\varphi = 30^\circ$ D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $SA \perp SC$ B. $SA \perp SB$ C. $SA \perp SD$ D. $SA \perp CD$

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng

- A. 60° B. 45° C. 120° D. 90°

Câu 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M là điểm bất kỳ trên đường thẳng AC . Số đo góc giữa hai đường thẳng BD , SM bằng

- A. 90° B. 120° C. 60° D. 45°

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng

- A. 120° B. 90° C. 60° D. 45°

Câu 16: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo giữa hai đường thẳng BC và SA bằng

- A. 45° B. 120° C. 90° D. 60°

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA = \sqrt{3}a$ và vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SB . Côsin góc giữa hai đường thẳng AM và SC bằng

- A. $\frac{5}{16}$ B. $\frac{11}{16}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{3}{8}$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Khi đó góc $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC})$ bằng

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Góc $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB})$ bằng

A. 120° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC})$ bằng

A. 45° B. 30° C. 90° D. 60°

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CD})$ bằng

A. 90° B. 45° C. 30° D. 60°

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Côsin góc giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

Câu 23: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC bằng

A. 90° B. 30° C. 45° D. 60°

Câu 24: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, B'C'$. Côsin góc giữa hai đường thẳng MN và AC bằng

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của AB . Góc giữa hai đường thẳng SM và BC bằng

A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Các tam giác SAB, SAD, SAC là các tam giác vuông tại A . Côsin góc giữa hai đường thẳng SC và BD bằng bao nhiêu, biết $SA = a\sqrt{3}, AB = a, AD = 3a$?

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{130}}{65}$ D. $\frac{4\sqrt{130}}{65}$

Câu 27: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Côsin giữa hai đường thẳng $A'C$ và $B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Câu 28: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của $BC, A'H = a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos \varphi$.

A. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$ C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{8}$ D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 29: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng

A. 90°

B. 60°

C. 45°

D. 120°

Câu 30: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD biết $AB = CD = a, MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Côsin góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SAB vuông cân tại S , có $SA = a$, tam giác ABC vuông cân tại C và $\widehat{BSC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của SB . Côsin góc giữa hai đường thẳng AB và CM bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{30}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 32: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn, $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Xét hai vectơ $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}, \vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{y}, \vec{x}$. Tính $\cos \alpha$

A. $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$

B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$

C. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$

D. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$

Câu 33: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $AB = 6cm, BC = BB' = 2cm$. Điểm E là trung điểm cạnh BC . Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng $C'E$, hai đỉnh P, Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại điểm F . Độ lớn DF bằng

A. 1cm

B. 2cm

C. 3cm

D. 6cm

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Vecto trong không gian

1 - B	2 - C	3 - C	4 - D	5 - C	6 - A	7 - B	8 - C	9 - C	10 - C
11 - A	12 - D	13 - D	14 - B	15 - A	16 - B	17 - A	18 - B	19 - A	20 - B
21 - C	22 - A	23 - D	24 - C	25 - B	26 - D	27 - A	28 - D	29 - A	30 - B
31 - A	32 - D	33 - C	34 - D	35 - B	36 - D	37 - B	38 - A		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Với ABC là tam giác đều ta có $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$ nhưng $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ và $\overline{AB} \neq -\overline{AC}$ nên **B** sai.

Câu 2.

Khẳng định (1) sai vì khi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng thì giá của chúng luôn song song với mặt phẳng.

Khẳng định (2) sai vì các vector đồng phẳng không yêu cầu là phải cùng phương.

Khẳng định (3) và (4) đúng theo điều kiện và định nghĩa ba vector đồng phẳng.

Câu 3.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 \sin^2 A} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 (1 - \cos^2 A)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - AB^2 \cdot AC^2 \cos^2 A} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}$$

$$\text{Vậy } k = \frac{1}{2}$$

Câu 4.

A sai vì $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{DB} \Leftrightarrow \overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{CD} = \overline{DC}$ (sai)

B sai vì $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{CD} + \overline{DB} \Leftrightarrow \overline{BC} = \overline{CB}$ (sai)

C sai vì $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{AD} - \overline{AB} = \overline{DC} + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{DB}$ (sai)

D đúng vì $\overline{BA} + \overline{CD} = \overline{BD} + \overline{CA} \Leftrightarrow \overline{BA} - \overline{BD} = \overline{DC} + \overline{CA} \Leftrightarrow \overline{DA} = \overline{DA}$ (đúng)

Câu 5.

Ta có $\overline{AB} = 3\overline{AC} \Rightarrow -\overline{BA} = -3\overline{CA} \Rightarrow \overline{BA} = 3\overline{CA} \neq -3\overline{CA}$. Từ đó phương án **A** sai.

Ta có $\overline{AB} = -3\overline{AC} \Rightarrow \overline{CB} - \overline{CA} = 3\overline{CA} \Rightarrow \overline{CB} = 4\overline{CA} \neq 2\overline{AC}$. Từ đó phương án **B** sai.

Ta có $\overline{AB} = -2\overline{AC} + 5\overline{AD} \Rightarrow \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ đồng phẳng $\Rightarrow A, B, C, D$ đồng phẳng (**C** đúng).

Phương án **D** sai vì nếu **B** là trung điểm của đoạn thẳng AC thì $\overline{AB} = \overline{BC}$ mà $\overline{BC} \neq -\frac{1}{2}\overline{BC}$.

Câu 6.

+) $\overline{SB} + \overline{SD} = \overline{SA} + \overline{SC} \Leftrightarrow \overline{SB} - \overline{SA} = \overline{SC} - \overline{SD} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow ABCD$ là hình bình hành (**A** đúng).

+) $\overline{AB} = \overline{CD}$ ta phải suy ra tứ giác $ABDC$ là hình bình hành chứ không phải $ABCD$ (**B** sai).

+) **C** sai vì $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \vec{0}$ đúng với mọi vị trí của A, B, C, D .

+) **D** sai vì với $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$ thì AD là đường chéo của hình bình hành $ABCD$.

Câu 7.

Ta có: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 19$

Suy ra $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$

Câu 8.

Ta có O là trọng tâm tam giác $\triangle BCD$ nên $\vec{BO} + \vec{CO} + \vec{DO} = \vec{0}$ (1)

Ta có: $\vec{AO} = \vec{AB} + \vec{BO}$; $\vec{AO} = \vec{AC} + \vec{CO}$; $\vec{AO} = \vec{AD} + \vec{DO}$

Từ (1) suy ra $3\vec{AO} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} \Rightarrow \vec{AO} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}) = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AD}$

Suy ra $\vec{OA} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AD}$ (2)

Mà $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AD}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AD}$

Câu 9.

C sai vì chỉ cần ba vector có giá cùng song song với một mặt phẳng thì ba vector đó đồng phẳng.

Câu 10.

A, B sai vì $\vec{OM} = \vec{OB} \Leftrightarrow M \equiv B$ và O, M, B, A thẳng hàng mà O là điểm bất kì.

C đúng vì $\vec{OM} = k\vec{OA} + (1-k)\vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OM} - \vec{OB} = k(\vec{OA} - \vec{OB}) \Leftrightarrow \vec{BM} = k \cdot \vec{BA}$

D sai vì $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} \Leftrightarrow OAMB$ là hình bình hành. Khi đó $M \notin AB$.

Câu 11.

Ta có: $\vec{AB} = \vec{A'B'} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{C'A'} = -\vec{A'B'} \cdot \vec{A'C'} = -\left(a^2 \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}\right) = -a^2$

Câu 12.

A sai khi $\vec{a}, \vec{b}$ có giá cùng nằm trong (P) , còn $\vec{c}$ có giá song song với (P) .

B sai với ba vector $\vec{a}, \vec{0}, \vec{c}$ ta có $\vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{a} + \vec{0} \cdot \vec{c}$ thì $\vec{a}, \vec{0}, \vec{c}$ đồng phẳng nhưng $\vec{c} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{0}$ chỉ đúng khi $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng phương với nhau.

C sai vì với 3 vector $\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ đồng phẳng với nhau ta có $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Khi đó $\vec{d} = (m-1)\vec{a} + n\vec{b} + \vec{a}$

Đặt $\vec{c} = \vec{a}$ thì $\vec{d} = (m-1)\vec{a} + n\vec{b} + \vec{c}$ nhưng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lại đồng phẳng với nhau.

Vậy cả ba khẳng định trên đều sai.

Câu 13.

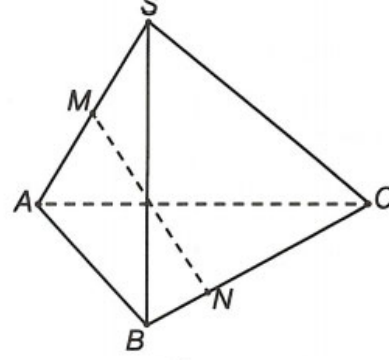
Phương án D sai do đẳng thức $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$ luôn đúng với vị trí bất kì trong không gian của bốn điểm A, B, C, D nên không đủ điều kiện để khẳng định A, B, C, D đồng phẳng.

Câu 14.

Ta có: $AC^2 = \overline{AC}^2 = (\overline{BC} - \overline{BA})^2 = BC^2 - 2\overline{BA} \cdot \overline{BC} + BA^2 \Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2}(BA^2 + BC^2 - AC^2)$

Câu 15.

$$\begin{aligned}\overline{MN} &= \overline{MS} + \overline{SN} = -\frac{1}{2}\overline{SA} + \overline{SB} + \overline{BN} = -\frac{1}{2}\overline{SA} + \overline{SB} + \frac{1}{4}\overline{BC} \\ &= -\frac{1}{2}\overline{SA} + \overline{SB} + \frac{1}{4}(\overline{SC} - \overline{SB}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

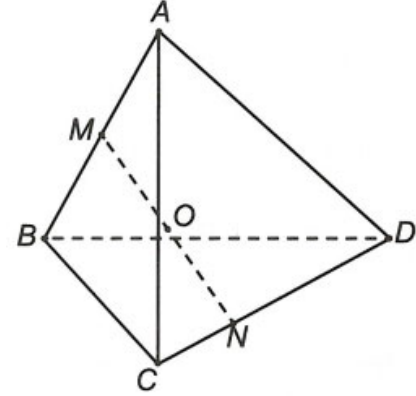


Câu 16.

Ta có $\overline{AO} = \frac{1}{2}(\overline{AM} + \overline{AN})$, trong đó $\overline{AM} = \frac{1}{2}\vec{a}$;

$$\overline{AN} = \overline{AC} + \overline{CN} = \overline{AC} + \frac{1}{3}\overline{CD} = \overline{AC} + \frac{1}{3}(\overline{AD} - \overline{AC}) = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\text{Vậy } \overline{AO} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$$



Câu 17.

Gọi G là trọng tâm ΔABC thì G cố định và $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$

$$\text{Ta có: } P = (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overline{MG} \cdot (\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv G$

Vậy $P_{\min} = GA^2 + GB^2 + GC^2$ với $M \equiv G$ là trọng tâm tam giác ABC.

Câu 18.

$$\text{Ta có } AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$$

$$\begin{aligned}&= (\overline{AG} + \overline{GB})^2 + (\overline{AG} + \overline{GC})^2 + (\overline{AG} + \overline{GD})^2 + (\overline{BG} + \overline{GC})^2 + (\overline{BG} + \overline{GD})^2 + (\overline{CG} + \overline{GD})^2 \\ &= 3AG^2 + 3BG^2 + 3CG^2 + 3DG^2 + 2(\overline{AG} \cdot \overline{GB} + \overline{AG} \cdot \overline{GC} + \overline{AG} \cdot \overline{GD} + \overline{BG} \cdot \overline{GC} + \overline{BG} \cdot \overline{GD} + \overline{CG} \cdot \overline{GD}) \quad (1)\end{aligned}$$

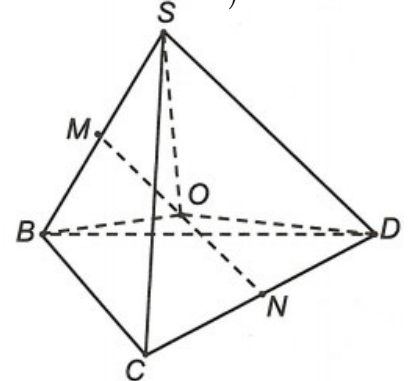
$$\text{Mà } \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} + \overline{GD})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$$

$$= 2(\overline{AG} \cdot \overline{GB} + \overline{AG} \cdot \overline{GC} + \overline{AG} \cdot \overline{GD} + \overline{BG} \cdot \overline{GC} + \overline{BG} \cdot \overline{GD} + \overline{CG} \cdot \overline{GD}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$$



Câu 19.

(I) Đúng vì

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'C} &= \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AA'} + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

(II) Sai vì

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC'} &= \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA'} + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

Câu 20.

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G} = \overrightarrow{AA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I} \\ &= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}) \\ \Rightarrow \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

Câu 21.Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ Từ $\overrightarrow{MA'} = k.\overrightarrow{MC}$, ta có $\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AA'} - k\overrightarrow{AC}}{1-k} = \frac{-k(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}}{1-k}$$

Từ $\overrightarrow{NC'} = l.\overrightarrow{ND}$, ta có $\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AN} = l(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AN})$

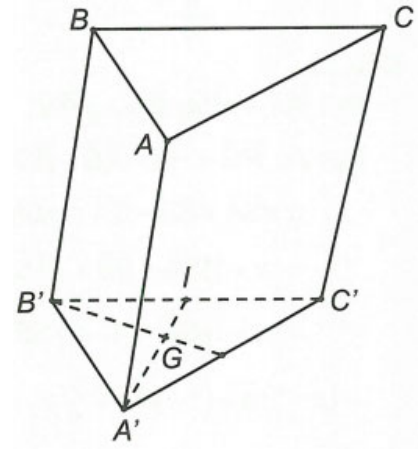
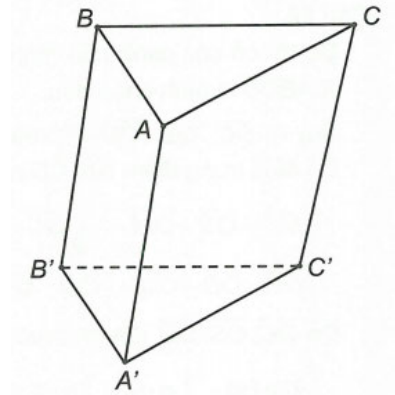
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC'} - l.\overrightarrow{AD}}{1-l} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - l\vec{b}}{1-l}$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$

$$= \frac{-k(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}}{1-k} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - l\vec{b}}{1-l} = \left(-\frac{k}{1-k} - \frac{1}{1-l}\right)\vec{a} + \left(-\frac{k}{1-k} - 1\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{1-k} - \frac{1}{1-l}\right)\vec{c}$$

Mặt khác $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ Để $MN \parallel BD'$ thì $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BD'}$ nên

$$\begin{cases} \frac{k}{1-k} + \frac{1}{1-l} = -\frac{k}{1-k} - 1 \\ -\frac{k}{1-k} - 1 = \frac{1}{1-k} - \frac{1}{1-l} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2k}{1-k} + \frac{1}{1-l} = -1 \\ \frac{k+1}{1-k} - \frac{1}{1-l} = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3k+1}{1-k} = -2 \Leftrightarrow k = -3$$

Từ đó ta có: $\frac{1}{1-l} = \frac{1}{2} \Rightarrow l = -1$. Vậy $k + l = -4$ 

Câu 22.

Do tất cả các cạnh của hình chóp bằng nhau nên hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều.

Suy ra $\overline{OC}; \overline{OS}; \overline{OD}$ đôi một vuông góc.

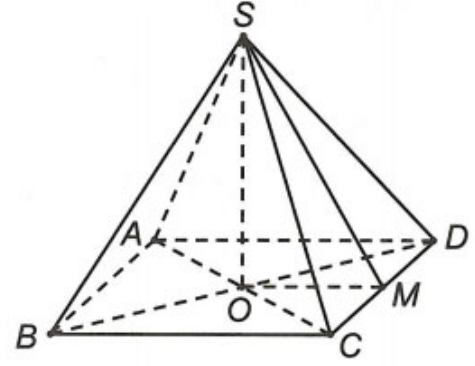
Do M là trung điểm của CD nên ta có:

$$\overline{MS} = \overline{OS} - \overline{OM} = -\frac{1}{2}\overline{OC} - \frac{1}{2}\overline{OD} + \overline{OS}$$

$$\overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC} = -\overline{OD} - \overline{OC}$$

Do $\overline{OC}; \overline{OS}; \overline{OD}$ đôi một vuông góc với nhau nên

$$\overline{MS} \cdot \overline{CB} = \frac{1}{2}OC^2 + \frac{1}{2}OD^2 = OC^2 = \frac{a^2}{2}$$

**Câu 23.**

Đặt $\overline{PA} = x\overline{SA}; \overline{BQ} = y\overline{BN}$

Suy ra: $\overline{PQ} = \overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BQ}$

$$= x\overline{SA} + \overline{SB} - \overline{SA} + y\overline{BN}$$

$$= (x-1)\overline{SA} + \overline{SB} + y(\overline{SN} - \overline{SB})$$

$$= (x-1)\overline{SA} + (1-y)\overline{SB} + \frac{y}{2}\overline{SC}$$

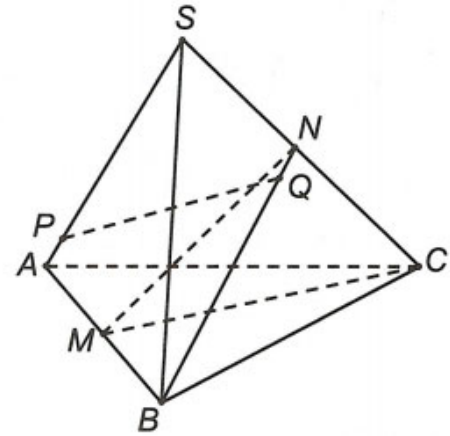
$$= (x-1)\vec{a} + (1-y)\vec{b} + \frac{y}{2}\vec{c} \quad (*)$$

$$\text{Lại có } \overline{CM} = \overline{SM} - \overline{SC} = \frac{1}{2}(\overline{SA} + \overline{SB}) - \overline{SC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$$

Để $PQ \parallel CM$ thì $\overline{PQ} = k\overline{CM}$ hay

$$\frac{x-1}{\frac{1}{2}} = \frac{1-y}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{y}{2}}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-y \\ 1-y = -\frac{y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Thay vào } (*) \text{ ta được } \overline{PQ} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

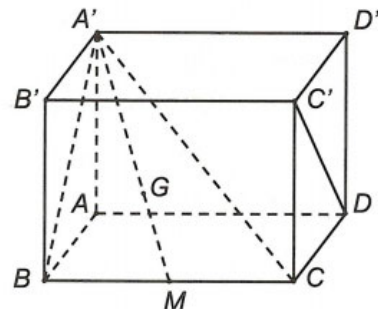
**Câu 24.**

C sai vì khi $AB \parallel (MNP)$ ta vẫn có $\overline{AB}, \overline{MN}, \overline{NP}$ đồng phẳng nhưng $\overline{AB} \not\subset (MNP)$ hay giá của $\overline{AB}$ không nằm trong (MNP) .

Câu 25.

$$\overline{AG} = \frac{1}{3}(\overline{AA'} + \overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{1}{3}(\overline{AA'} + \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AD})$$

$$\text{Suy ra } AG^2 = \overline{AG}^2 = \frac{1}{9}(AA'^2 + 4AB^2 + AD^2)$$



$$= \frac{1}{9}(a^2 + 4a^2 + a^2) = \frac{2}{3}a^2$$

Câu 26.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD . Do O là giao điểm của AC và BD nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} &= 4\overrightarrow{SO} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA}) + (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB}) + (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SC}) + (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SD}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow O \equiv M \equiv N \\ \Leftrightarrow ABCD &\text{ là hình bình hành.}\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề (I) và (II) đều đúng.

Bình luận: Để chứng minh mệnh đề (I) và (II) đúng, ta áp dụng: Cho $A \in a, B \in b$ và $\{O\} = a \cap b$.

Khi đó $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow O \equiv A \equiv B$.

Chứng minh: Nếu A không trùng O thì B không trùng O (do $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow OA \equiv a$ và $OB \equiv b$)

Nhưng $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow O, A, B$ thẳng hàng $\Rightarrow a = b \Rightarrow a \cap b = a$ (trái với giả thiết $O = a \cap b$)

Câu 27.

Từ giả thiết suy ra $\triangle SBC$ vuông cân tại S ; $\triangle SAC$ là tam giác đều.

$$\text{Có } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA}$$

$$= -SC \cdot SA \cdot \cos \widehat{ASC} = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2 \cdot \frac{-1}{2} = \frac{-a^2}{2}$$

Câu 28.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD .

Ta có: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SM} = 2\overrightarrow{SN} \Leftrightarrow \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SN} \Leftrightarrow M \equiv N \Leftrightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Câu 29.

Ta có $\vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{z})$ nên ba vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

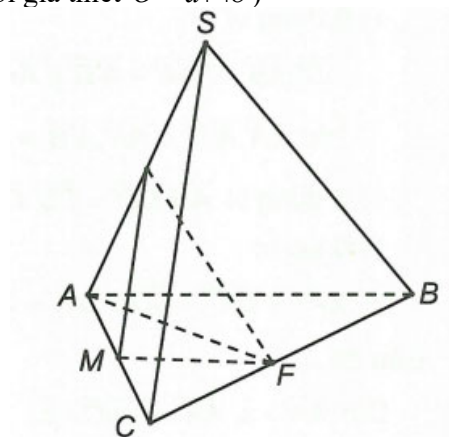
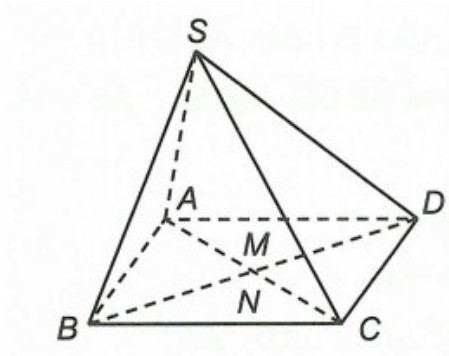
Câu 30.

Khẳng định **B** sai.

Các vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m, n : \vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$

Ta có $\vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$

$$\Leftrightarrow \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} = m(3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}) + n(2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2n = 1 \\ -3m - 3n = -2 \\ 2m - 3n = 4 \end{cases} \text{ (hệ vô nghiệm).}$$



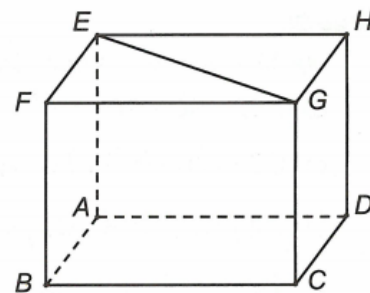
Vậy không tồn tại hai số $m, n : \vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$

Câu 31.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH}$$

$$\text{Do } AB \perp EH \text{ nên } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = 0$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}^2 = a^2$$



Câu 32.

+) **A** đúng vì

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC'}^2 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})^2 \\ &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA'}^2 \left(\text{do } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \right) \\ &= 3a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{AC'}| = a\sqrt{3}$$

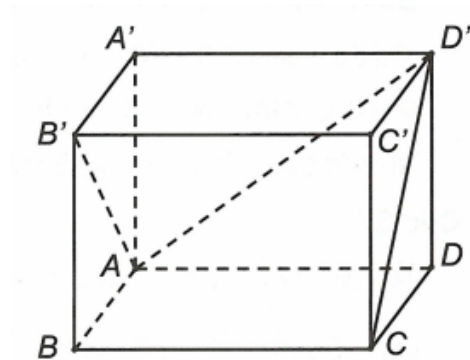
+) **B** đúng vì

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} &= (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'}) \cdot (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}) = \overrightarrow{AA'}^2 = a^2 \\ \left(\text{do } \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'D'} = 0 \right) \end{aligned}$$

+) **C** đúng vì $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{DC'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$ (do $DC' \perp CD'$)

+) **D** sai vì

$$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A'} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \neq \vec{0}$$



Câu 33.

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

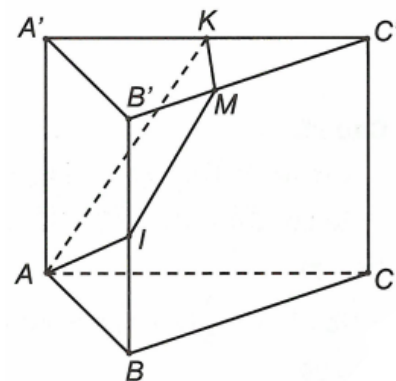
$$\text{Do } \overrightarrow{MB'} = k\overrightarrow{MC'} \text{ nên } \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AM})$$

$$\Rightarrow (k-1)\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'} = k(\vec{a} + \vec{c}) - (\vec{a} + \vec{b}) = (k-1)\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$$

Vì bốn điểm A, M, I, K đồng phẳng nên $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AK}$ đồng phẳng, do đó

$$(k-1)\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AI} - y\overrightarrow{AK}$$

$$\Leftrightarrow (k-1)\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c} = x\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) + y\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$



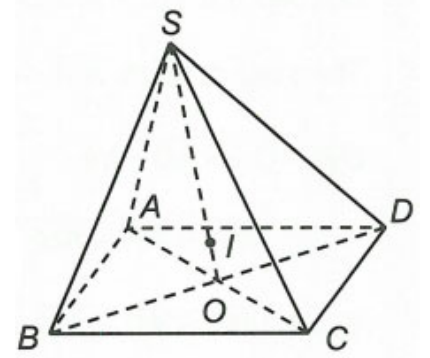
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1) = \frac{1}{2}x + y \\ -1 = x \\ k = \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ . Vậy } k = -\frac{1}{2}$$

Câu 34.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SI} = 4\overrightarrow{IO}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IS})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IS} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IS} + 4\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \left(\text{do } \overrightarrow{SI} = 4\overrightarrow{IO}; \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \right) \end{aligned}$$

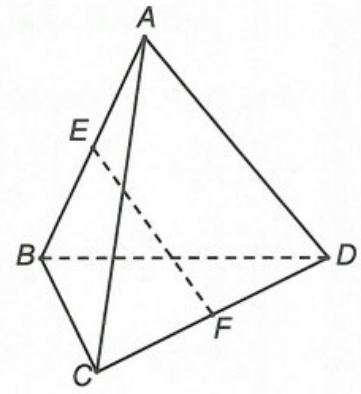
$$\text{Vậy } P_{\min} \Leftrightarrow M \equiv I \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{4}{5}.$$



Câu 35.

Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến, ta có:

$$\begin{aligned} ME^2 &= \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2} \\ &= 2ME^2 + 2a^2 \end{aligned}$$



Câu 36.

Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}$, ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \vec{b} - \vec{a};$$

$$\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA} \Rightarrow -\overrightarrow{SM} = -2(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SM}) \Rightarrow \overrightarrow{SM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SA} = \frac{2}{3}\vec{a};$$

$$\overrightarrow{NB} = k\overrightarrow{NC} \Rightarrow \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SN} = k(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SN})$$

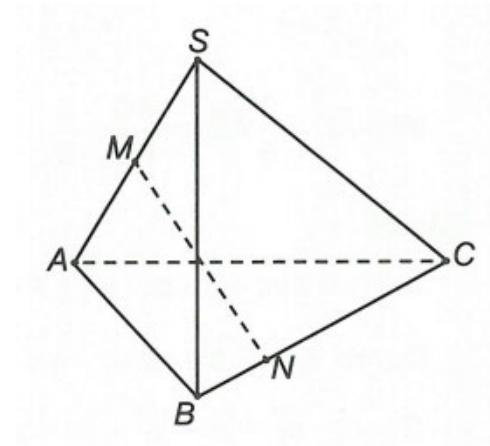
$$\Rightarrow (k-1)\overrightarrow{SN} = k\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} = k\vec{c} - \vec{b};$$

$$(k-1)\overrightarrow{MN} = (k-1)(\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM}) = k\vec{c} - \vec{b} - \frac{2(k-1)}{3}\vec{a}$$

Để ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng ta có

$$(k-1)\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{SC}$$

$$\Leftrightarrow k\vec{c} - \vec{b} - \frac{2(k-1)}{3}\vec{a} = x(\vec{b} - \vec{a}) + y\vec{c}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} -x = -\frac{2(k-1)}{3} \\ x = -1 \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ k = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $k = -\frac{1}{2}$

Câu 37.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Theo bài ra ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}; \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}); \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{b}$.

Đặt $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD} = k\vec{c}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b} \\ \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + k\vec{c} \end{cases}$$

Vì M, N, P, Q đồng phẳng nên $x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ}$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) + y\left(-\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b}\right) = -\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + k\vec{c}$$

$$-\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y\right)\vec{a} - \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{12}y\right)\vec{b} + \frac{1}{2}x\vec{c} = -\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + k\vec{c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}y = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ k = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{5}.$$

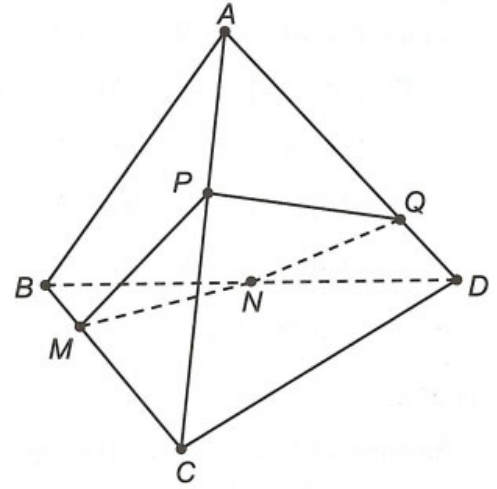
Câu 38.

$$\text{Ta có } 0 \leq |\vec{m} + \vec{n} + \vec{p} + \vec{q}|^2 = 4 + 2(\vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{m} \cdot \vec{p} + \vec{m} \cdot \vec{q} + \vec{n} \cdot \vec{p} + \vec{n} \cdot \vec{q} + \vec{p} \cdot \vec{q})$$

$$\text{Suy ra } \vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{m} \cdot \vec{p} + \vec{m} \cdot \vec{q} + \vec{n} \cdot \vec{p} + \vec{n} \cdot \vec{q} + \vec{p} \cdot \vec{q} \geq -2$$

$$\begin{aligned} S &= |\vec{m} - \vec{n}|^2 + |\vec{m} - \vec{p}|^2 + |\vec{m} - \vec{q}|^2 + |\vec{n} - \vec{p}|^2 + |\vec{n} - \vec{q}|^2 + |\vec{p} - \vec{q}|^2 \\ &= 12 - 2(\vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{m} \cdot \vec{p} + \vec{m} \cdot \vec{q} + \vec{n} \cdot \vec{p} + \vec{n} \cdot \vec{q} + \vec{p} \cdot \vec{q}) \quad (\text{do } |\vec{m}| = |\vec{n}| = |\vec{p}| = |\vec{q}| = 1) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } |\vec{m} - \vec{n}|^2 + |\vec{m} - \vec{p}|^2 + |\vec{m} - \vec{q}|^2 + |\vec{n} - \vec{p}|^2 + |\vec{n} - \vec{q}|^2 + |\vec{p} - \vec{q}|^2 \leq 12 - 2 \cdot (-2) = 16$$



Dấu “=” xảy ra chẳng hạn khi $\vec{m} = \vec{n} = (1; 0; 0)$ và $\vec{p} = \vec{q} = (-1; 0; 0)$.