

ĐẠO HÀM

BÀI GIẢNG VI PHÂN VÀ ĐẠO HÀM CẤP CAO

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Trình bày được định nghĩa vi phân.
- + Trình bày được phương pháp tính gần đúng nhờ vi phân.
- + Trình bày được phương pháp tính đạo hàm cấp 2, cấp 3, ..., cấp n.

❖ Kỹ năng

- + Tính được vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0 cho trước.
- + Tìm vi phân của hàm số $f(x)$.
- + Biết cách tính gần đúng một số dựa vào vi phân.
- + Biết tính đạo hàm cấp 2, cấp 3, ..., cấp n.
- + Biết chứng minh được đẳng thức, bất đẳng thức, giải phương trình, bất phương trình liên quan đến đạo hàm cấp 2, 3.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a; b)$. Gọi Δx là số gia của x . *Nếu chọn hàm số $y = x$ thì ta có $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.*

Ta gọi tích $f'(x) \cdot \Delta x$ là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx . Kí hiệu $df(x)$ hoặc dy , tức là *Do vậy ta thường kí hiệu $\Delta x = dx$ và $dy = f'(x)dx$.*

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Ứng dụng của vi phân vào phép tính gần đúng

Công thức tính gần đúng nhờ vi phân là

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Đạo hàm cấp cao

+ **Đạo hàm cấp hai:** Cho hàm số f có đạo hàm f' . Nếu f' cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp hai của f và được kí hiệu là f'' , tức là $f'' = (f')'$.

+ **Đạo hàm cấp n :** Cho hàm số f có đạo hàm cấp $n-1$ (với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) là $f^{(n-1)}$. Nếu $f^{(n-1)}$ cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của f và được kí hiệu là $f^{(n)}$, tức là

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)} \right)'$$

+ Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai $s''(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t .

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính vi phân

Bài toán 1. Tìm vi phân của hàm số

 Phương pháp giải

a) Tính vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0 cho trước:

- Tính đạo hàm của hàm số tại x_0 .

- Vi phân của hàm số tại x_0 ứng với số gia Δx là

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

b) Tìm vi phân của hàm số $f(x)$.

- Tính đạo hàm của hàm số.

- Vi phân của hàm số $dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$.

Ví dụ. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 7$

a) Tính vi phân của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ứng với số gia $\Delta x = 0,02$.

b) Tìm vi phân của hàm số.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y' = f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$.

Do đó vi phân của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ứng với số gia $\Delta x = 0,02$ là

$$df(1) = f'(1) \cdot \Delta x = (3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 2) \cdot 0,02 = 0,14.$$

b) $dy = f'(x) \cdot \Delta x = (3x^2 + 6x - 2) dx$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 - 5$. Tính vi phân của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ứng với số gia $\Delta x = 0,02$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = f'(x) = 3x^2 - 4x$. Do đó vi phân của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ứng với số gia $\Delta x = 0,02$ là

$$df(1) = f'(1) \cdot \Delta x = (3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1) \cdot 0,02 = -0,02.$$

Ví dụ 2. Tìm vi phân của hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y' = \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow dy = y' dx = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Bài toán 2. Tính gần đúng giá trị của hàm số

Phương pháp giải

Để tính gần đúng giá trị của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = (x_0 + \Delta x)$ cho trước, ta áp dụng công thức $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Ví dụ. Tính gần đúng giá trị của $\sqrt{49,25}$ (lấy 5 chữ số thập phân trong kết quả).

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt{49,25} = \sqrt{49 + 0,25}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Chọn $x_0 = 49$ và $\Delta x = 0,25$, ta có

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{49 + 0,25} &\approx \sqrt{49} + \frac{1}{2\sqrt{49}} \cdot 0,25 = 7 + 0,01786 \\ &= 7,01786 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{49 + 0,25} \approx 7,01786.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tính gần đúng $\frac{1}{0,9995}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\frac{1}{0,9995} = \frac{1}{1 - 0,0005}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Chọn $x_0 = 1$ và $\Delta x = -0,0005$, ta có $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - 0,0005} \approx 1 - 1 \cdot (-0,0005) \approx 1,0005$$

Ví dụ 2. Tính gần đúng $\sin 46^\circ$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\sin 46^\circ = \sin(45^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right)$.

Xét hàm số $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$.

Chọn $x_0 = \frac{\pi}{4}$ và $\Delta x = \frac{\pi}{180}$, ta có $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{360}.$$

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Vi phân của hàm số $f(x) = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 2$, ứng với $\Delta x = 0,1$ là

- A. -0,07. B. 10. C. 1,1. D. -0,4.

Câu 2: Vi phân của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 5x}$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5x}} dx$. B. $dy = \frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x}} dx$.
C. $dy = -\frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}} dx$. D. $dy = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}} dx$.

Câu 3: Vi phân của hàm số $y = x \sin x + \cos x$ là

A. $dy = (2 \sin x + x \cos x) dx$.

B. $dy = x \cos x dx$

C. $dy = x \cos x$

D. $dy = (\sin x + \cos x) dx$

Câu 4: Dùng công thức vi phân làm tròn đến số thập phân thứ tư của $\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{80}\right)$ được kết quả

A. 1,2608.

B. 1,2611.

C. 1,3391

D. 1,3392.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = -\cot x$.

B. $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = -\tan x$.

C. $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \cot x$.

D. $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \tan x$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x) = (x-1)^2$. Biểu thức nào sau đây là vi phân của hàm số $f(x)$?

A. $dy = 2(x-1)dx$.

B. $dy = (x-1)^2 dx$.

C. $dy = 2(x-1)$.

D. $dy = (x-1)dx$.

Câu 7: Vi phân của hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ là

A. $dy = (3x^2 - 18x + 12)dx$.

B. $dy = (-3x^2 - 18x + 12)dx$.

C. $dy = -(3x^2 - 18x + 12)dx$.

D. $dy = (-3x^2 + 18x + 12)dx$

Câu 8: Vi phân của hàm số là $y = \sqrt{1+x^2}$ là

A. $dy = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

B. $dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

C. $dy = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

D. $dy = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Câu 9: Vi phân của hàm số là $y = \sqrt{3x+2}$ là

A. $dy = \frac{3}{\sqrt{3x+2}} dx$.

B. $dy = \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} dx$.

C. $dy = \frac{1}{\sqrt{3x+2}} dx$.

D. $dy = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} dx$.

Câu 10: Vi phân của hàm số $y = \frac{2x+3}{2x-1}$ là

A. $dy = -\frac{8}{(2x-1)^2} dx$.

B. $dy = \frac{4}{(2x-1)^2} dx$.

C. $dy = -\frac{4}{(2x-1)^2} dx$.

D. $dy = -\frac{7}{(2x-1)^2} dx$.

Câu 11: Hàm số $y = x \sin x + \cos x$ có vi phân là

A. $dy = (x \cos x - \sin x) dx$.

B. $dy = (x \cos x) dx$.

C. $dy = (\cos x - \sin x) dx$.

D. $dy = (x \sin x) dx$.

Câu 12: Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 2x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx.$

B. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx.$

C. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx.$

D. $df(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx.$

Câu 13: Vi phân của hàm số $y = \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ là

A. $dy = \frac{2\sqrt{x}}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

B. $dy = \frac{\sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

C. $dy = \frac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

D. $dy = \frac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4x\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{1}{3x^3}$. Vi phân của hàm số là

A. $dy = \frac{1}{4} dx.$

B. $dy = \frac{1}{x^4} dx.$

C. $dy = -\frac{1}{x^4} dx.$

D. $dy = x^4 dx.$

Dạng 2: Đạo hàm cấp cao

Bài toán 1. Tính đạo hàm đến cấp n của hàm số

🚦 Phương pháp giải

+ Áp dụng trực tiếp công thức để tính đạo hàm cấp hai $y'' = (y')$. Tính $y''(x_0)$.

+ Cấp 3, 4... ta tính tương tự.

Ví dụ. Tìm đạo hàm cấp 3 của hàm số $y = \cos^2 x$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \Rightarrow y' = -\sin 2x$$

$$\Rightarrow y'' = -2 \cos 2x \Rightarrow y''' = 4 \sin 2x.$$

🚦 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm cấp 4 của hàm số $y = \frac{3x-1}{x+2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{7}{(x+2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-7[(x+2)^2]'}{(x+2)^4} = \frac{-14}{(x+2)^3}$$

$$\Rightarrow y''' = \frac{14[(x+2)^3]'}{(x+2)^6} = \frac{42}{(x+2)^4} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{-42[(x+2)^4]'}{(x+2)^8} = \frac{-168}{(x+2)^5}.$$

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm cấp 5 của hàm số $y = \sin^2 2x$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y = \sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$$

$$\Rightarrow y' = 2 \sin 4x \Rightarrow y'' = 8 \cos 4x \Rightarrow y''' = -32 \sin 4x$$

$$\Rightarrow y^{(4)} = -128 \cos 4x \Rightarrow y^{(5)} = 512 \sin 4x$$

Bài toán 2. Tính đạo hàm cấp cao của hàm số

Phương pháp giải

Ví dụ. Tìm đạo hàm cấp của hàm số

$$y = \sin x \left(n \in \mathbb{N}^* \right).$$

Hướng dẫn giải

Bước 1: Tính y', y'', y''' . Dựa vào các đạo hàm vừa tính, dự đoán công thức tính $y^{(n)}$.

$$\text{Ta có: } y' = \cos x = \sin \left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{2} \right);$$

$$y'' = -\sin x = \sin \left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right);$$

$$\text{Dự đoán: } y^{(n)} = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*. (1)$$

Bước 2: Chứng minh công thức vừa dự đoán là đúng bằng phương pháp quy nạp.

Chứng minh (1) bằng quy nạp:

- $n = 1$: (1) Hiển nhiên đúng.
- Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$ nghĩa là

$$y^k = \sin \left(x + k \frac{\pi}{2} \right)$$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$ nghĩa là ta phải chứng minh

$$y^{(k+1)} = \sin \left(x + (k+1) \frac{\pi}{2} \right). (2)$$

Thật vậy, xét (2) ta có

$$\begin{aligned} VT &= y^{k+1} = [y^k]' = \left[\sin \left(x + k \frac{\pi}{2} \right) \right]' = \cos \left(x + k \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \sin \left(x + (k+1) \frac{\pi}{2} \right) = VP. \end{aligned}$$

Suy ra (2) đúng, nghĩa là (1) đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có công thức

$$y^n = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Chú ý: Cần phân tích kĩ các kết quả của đạo hàm y', y'', y''' , tìm ra quy luật để dự đoán công thức $y^{(n)}$ chính xác

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-7}{(x-2)^2}, y'' = \frac{7 \cdot 2}{(x-2)^3}, y''' = \frac{-7 \cdot 2 \cdot 3}{(x-2)^4}.$$

$$\text{Bằng quy nạp ta chứng minh } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 7 \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} \cdot (2)$$

- Với $n = 1$ ta thấy (2) đúng.
- Giả sử (2) đúng với $n = k$, tức là $y^{(k)} = \frac{(-1)^k \cdot 7 \cdot k!}{(x-2)^{k+1}}$.

$$\text{Ta có: } y^{(k+1)} = \left(\frac{(-1)^k \cdot 7 \cdot k!}{(x-2)^{k+1}} \right)' = - \frac{(-1)^k \cdot 7 \cdot k! \cdot (k+1)}{(x-2)^{k+2}} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 7 \cdot (k+1)!}{(x-2)^{k+2}}.$$

Do đó (2) đúng với mọi số tự nhiên n .

Vậy theo nguyên lí quy nạp ta có công thức đạo hàm cấp cao của hàm số

$$y = \frac{3x+1}{x-2} \text{ là } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 7 \cdot n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

Bài toán 3. Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, giải phương trình, bất phương trình

Phương pháp giải

Áp dụng quy tắc tính đạo hàm để **Ví dụ.** Cho hàm số $y = x \sin x$

chứng minh bất đẳng thức, giải Chứng minh $x \cdot y'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0$.
phương trình, bất phương trình.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$y' = (x \sin x)' \Leftrightarrow y' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)'$$

$$\Leftrightarrow y' = \sin x + x \cos x$$

$$y'' = (\sin x + x \cos x)' = (\sin x)' + (x \cos x)'$$

$$= \cos x + x' \cdot \cos x + x \cdot (\cos x)' = 2 \cos x - x \sin x.$$

$$\text{Ta có } x \cdot y'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2 \cos x - x \sin x) - 2(\sin x + x \cos x - \sin x) + x^2 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \cos x - x^2 \sin x - 2x \cos x + x^2 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

(điều phải chứng minh).

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chứng minh $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = \left(\sqrt{2x - x^2} \right)' \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (2x - x^2)' = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

$$y'' = \frac{(1 - x)' \cdot \sqrt{2x - x^2} - \left(\sqrt{2x - x^2} \right)' \cdot (1 - x)}{\left(\sqrt{2x - x^2} \right)^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2x - x^2} - \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}} \cdot (1 - x)}{\left(\sqrt{2x - x^2} \right)^2}$$

$$= \frac{-(2x - x^2) - (1 - x)^2}{\sqrt{2x - x^2} \cdot \left(\sqrt{2x - x^2} \right)^2} = \frac{-1}{\left(\sqrt{2x - x^2} \right)^3}.$$

$$\text{Ta có } y^3 \cdot y'' + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x - x^2} \right)^3 \cdot \frac{-1}{\left(\sqrt{2x - x^2} \right)^3} + 1 = 0 \Leftrightarrow -1 + 1 = 0$$

(điều phải chứng minh).

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$. Chứng minh $y'' + y = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x}$$

$$= \frac{(\sin x \cos x)(1 - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x} = \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow y' = \cos x - \sin x \Rightarrow y'' = -\sin x - \cos x.$$

Ta có $y'' + y = 0 \Leftrightarrow -\sin x - \cos x + \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (điều phải chứng minh).

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{2x+4}{x^2+4x+3}$. Giải phương trình $y'' = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y = \frac{2x+4}{x^2+4x+3} = \frac{2(x+2)}{(x+2)^2-1}$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{2(x+2)}{(x+2)^2-1} \right)' = \frac{2(x+2)^2-2-2(x+2).2(x+2)}{\left[(x+2)^2-1 \right]^2} = \frac{-2(x+2)^2-2}{\left[(x+2)^2-1 \right]^2}$$

$$\Rightarrow y'' = \left(\frac{-2(x+2)^2-2}{\left[(x+2)^2-1 \right]^2} \right)'$$

$$= \frac{-4(x+2)\left[(x+2)^2-1 \right]^2 - \left[-2(x+2)^2-2 \right].2\left[(x+2)^2-1 \right]2(x+2)}{\left[(x+2)^2-1 \right]^4}$$

$$= \frac{4(x+2)\left[(x+2)^2-1 \right]\left[-(x+2)^2+1+2(x+2)^2+2 \right]}{\left[(x+2)^2-1 \right]^4}$$

$$= \frac{4(x+2)\left[(x+2)^2-1 \right]\left[(x+2)^2+3 \right]}{\left[(x+2)^2-1 \right]^4}.$$

$$\text{Ta có } y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{4(x+2)\left[(x+2)^2-1 \right]\left[(x+2)^2+3 \right]}{\left[(x+2)^2-1 \right]^4} = 0.$$

Điều kiện: $(x+2)^2-1 \neq 0$.

Khi đó $y'' = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.



Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - 4$ tại điểm $x = 1$ là

A. 1.

B. 10.

C. 4.

D. 16.

Câu 2: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{3x+1}{x+2}$ là

- A. $y'' = \frac{10}{(x+2)^2}$. B. $y'' = -\frac{5}{(x+2)^4}$. C. $y'' = -\frac{5}{(x+2)^3}$. D. $y'' = -\frac{10}{(x+2)^3}$.

Câu 3: Cho $f(x) = \sin 3x$. Giá trị của $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

- A. -9. B. 0. C. 9. D. -3.

Câu 4: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \cos^2 x$ là

- A. $y'' = -2 \cos 2x$. B. $y'' = -2 \sin 2x$.
C. $y'' = 2 \cos 2x$. D. $y'' = 2 \sin 2x$.

Câu 5: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x) = x \sin x - 3$ là

- A. $f''(x) = -x \sin x$. B. $f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$.
C. $f''(x) = \sin x - x \cos x$. D. $f''(x) = 1 + \cos x$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x) = \sin x$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. B. $y'' = \sin(x + \pi)$.
C. $y''' = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$. D. $y^{(4)} = \sin(2\pi - x)$

Câu 7: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 5x \cos 2x$ là

- A. $y' = 49 \sin 7x + 9 \sin 3x$. B. $y' = -49 \sin 7x - 9 \sin 3x$.
C. $y' = \frac{49}{2} \sin 7x + \frac{9}{2} \sin 3x$. D. $y' = -\frac{49}{2} \sin 7x - \frac{9}{2} \sin 3x$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $4y - y'' = 0$. B. $4y + y'' = 0$. C. $y = y' \tan 2x$. D. $y^2 + (y')^2 = 4$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp hai của f là

- A. $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$. B. $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$.
C. $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$. D. $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Phương trình $y'' = 0$ có nghiệm là

- A. $x = 2$. B. $x = 4$. C. $x = 1$. D. $x = 3$.

Câu 11: Cho $f(x) = x^4 - \cos 2x$. Tìm $f^4(x)$.

- A. $f^4(x) = 24x - 16 \cos 2x$. B. $f^4(x) = 16 \cos 2x$.
C. $f^4(x) = 24x - 8 \sin 2x$. D. $f^4(x) = 24 - 16 \cos 2x$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$ khẳng định nào đúng?

(I) $y.y' = 2x$; (II) $y^2.y'' = y'$.

- A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Cả hai đều đúng. D. Cả hai đều sai.

Câu 13: Cho hàm số $y = \sqrt{1 + 3x - x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $(y')^2 + y.y'' = -1$. B. $(y')^2 + 2y.y'' = 1$

C. $y.y'' - (y')^2 = 1$ D. $(y')^2 + y.y'' = 1$

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x - 1}$. Giá trị của $f'''(1)$ bằng

- A. 3. B. -3. C. $\frac{3}{2}$. D. 0.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Tính $P = f'''(\pi)$.

- A. $P = 4$. B. $P = 0$. C. $P = -4$. D. $P = -1$.

Câu 16: Xét hàm số $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ của phương trình $f^{(4)}(x) = -8$ là

- A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = 0, x = \frac{\pi}{6}$. C. $x = 0, x = \frac{\pi}{3}$. D. $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $y''y^3 + 2 = 0$. B. $y''y^3 = 2$. C. $y''y + 2(y')^2 = 0$. D. $y''y = 2(y')^2$

Câu 18: Cho hàm số $y = \sin^2 2x$. Giá trị của biểu thức $y^{(3)} + y'' + 16y' + 16y - 8$ là

- A. -8. B. 0. C. 8. D. $16 \sin 4x$.

Câu 19: Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \cos 2x$ là

A. $y^{(n)} = (-1)^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$. B. $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

C. $y^{(n)} = 2^{n+1} \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$. D. $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 20: Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sqrt{2x + 1}$ là

A. $y^n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 5 \dots (3n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$. B. $y^n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

C. $y^n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{\sqrt{(2x+1)^{2n+1}}}$. D. $y^n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

Câu 21: Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$ là

A. $y^{(n)} = \frac{5 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$. B. $y^{(n)} = \frac{5 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}} - \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$.

$$\text{C. } y^{(n)} = \frac{5 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

$$\text{D. } y^{(n)} = \frac{5 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

Câu 22: Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}$ là

$$\text{A. } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot n!}{(x+3)^{n+1}} + \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

$$\text{B. } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot n!}{(x+3)^n} - \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x+2)^n}.$$

$$\text{C. } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot n!}{(x+3)^{n-1}} - \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x+2)^{n-1}}.$$

$$\text{D. } y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot n!}{(x+3)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

Câu 23: Đạo hàm cấp 2021 của hàm số $f(x) = \cos(x+a)$ là

$$\text{A. } f^{(2021)}(x) = -\cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{B. } f^{(2021)}(x) = -\sin\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{C. } f^{(2021)}(x) = \cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{D. } f^{(2021)}(x) = \sin\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right).$$

Câu 24: Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sin 2x$ là

$$\text{A. } y^{(n)} = 2^{n+1} \sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{B. } y^{(n)} = 2^{n-1} \sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{C. } y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{D. } y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Câu 25: Cho hàm số $y = \sin 3x \cdot \cos x - \sin 2x$. Giá trị của $y^{(10)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ gần nhất với số nào dưới đây?

$$\text{A. } 454492.$$

$$\text{B. } 2454493.$$

$$\text{C. } 454491.$$

$$\text{D. } 454490.$$

Câu 26: Cho hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$. Đạo hàm $y^{(n)}$ là

$$\text{A. } \frac{1}{2^n} \sin\left(\frac{x}{2}+n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{B. } \sin\left(\frac{x}{2}+n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{C. } 2^n \sin\left(\frac{x}{2}+n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{D. } \frac{1}{2^n} \sin\left(\frac{x}{2}+n\pi\right).$$

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = (3x^2 - 2x - 1)^9$. Tính đạo hàm cấp 6 của hàm số tại điểm $x = 0$.

$$\text{A. } f^{(6)}(0) = -60480$$

$$\text{B. } f^{(6)}(0) = -34560$$

$$\text{C. } f^{(6)}(0) = 60480$$

$$\text{D. } f^{(6)}(0) = 34560$$

THAM KHẢO ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT SỐ 9 VÀ SỐ 10
THAM KHẢO ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ SỐ 2 VÀ SỐ 3 VÀ SỐ 4

ĐÁP ÁN**BÀI 3. ĐẠO HÀM CẤP CAO – VI PHÂN****Dạng 1. Tính vi phân**

1 - C	2 - D	3 - B	4 - A	5 - A	6 - A	7 - A	8 - B	9 - D	10 - A
11 - B	12 - B	13 - C	14 - C						

HƯỚNG DẪN CHI TIẾT**Câu 1.**

Ta có: $f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow f'(2) = 11 \Rightarrow df(2) = f'(2)\Delta x = 11.0,1 = 1,1$.

Câu 2.

Ta có $dy = y'dx = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}dx$.

Câu 3.

$dy = (x \sin x + \cos x)' dx = (1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x - \sin x) dx = x \cos x dx$.

Câu 4.

Xét hàm số $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

Chọn $x_0 = \frac{\pi}{3}$ và $\Delta x = -\frac{3\pi}{80}$, ta có $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{80}\right) \approx \tan \frac{\pi}{3} + \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3\pi}{80}\right) \approx 1,2608.$$

Câu 5.

Ta có $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{(\sin x)'}{(\cos x)'} = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\cot x$.

Câu 6.

Ta có $dy = \left[(x-1)^2\right]' dx = 2(x-1)dx$.

Câu 7.

Ta có $dy = (x^3 - 9x^2 + 12x - 5)' dx = (3x^2 - 18x + 12)dx$.

Câu 8.

Ta có $dy = \left(\sqrt{1+x^2}\right)' dx = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Câu 9.

Ta có $dy = \left(\sqrt{3x+2}\right)' dx = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} dx$.

Câu 10.

$$\text{Ta có } dy = \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)' dx = \frac{-8}{(2x-1)^2} dx.$$

Câu 11.

$$\text{Ta có } dy = (x \sin x + \cos x)' dx = (\sin x + x \cos x - \sin x) dx = (x \cos x) dx.$$

Câu 12.

$$\text{Ta có } y' = \frac{(1 + \cos^2 2x)'}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} = \frac{-2.2. \cos 2x. \sin 2x}{2\sqrt{1 + \cos^2 2x}} = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} \Rightarrow df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} dx.$$

Câu 13.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } dy &= \left(\frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)' dx = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - \tan \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} - \frac{\sin \sqrt{x}}{\cos \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{2x\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2\sqrt{x} - \sin(2\sqrt{x})}{4\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

Câu 14.

$$\text{Ta có } dy = \left(\frac{1}{3x^3} \right)' dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{(x^3)^2} = -\frac{1}{x^4} dx.$$

Dạng 2. Đạo hàm cấp cao

1 - C	2 - D	3 - A	4 - A	5 - B	6 - D	7 - D	8 - B	9 - B	10 - C
11 - D	12 - D	13 - A	14 - A	15 - C	16 - A	17 - D	18 - B	19 - D	20 - D
21 - D	22 - D	23 - C	24 - D	25 - D	26 - A	27 - A			

HƯỚNG DẪN CHI TIẾT**Câu 1.**

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 2x.$$

$$\text{Suy ra: } f''(x) = 6x - 2. \text{ Suy ra } f''(1) = 4.$$

Câu 2.

$$\text{Ta có } y = 3 - \frac{5}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{5}{(x+2)^2} \Rightarrow y'' = -\frac{10}{(x+2)^3}.$$

Câu 3.

Ta có $f'(x) = 3 \sin 3x$, suy ra $f''(x) = -9 \sin 3x$.

$$\text{Do đó } f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9 \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -9.$$

Câu 4.

$$y' = 2 \cos x.(-\sin x) = -\sin 2x \Rightarrow y'' = -2 \cos 2x.$$

Câu 5.

$$\text{Ta có } y' = f'(x) = (x \sin x - 3)' = \sin x + x \cos x$$

$$\text{Vậy } y'' = f''(x) = (\sin x + x \cos x)' = 2 \cos x - x \sin x.$$

Câu 6.

Ta có

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y'' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi) \Rightarrow y''' = \sin\left(x + \pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y^{(4)} = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

$$\text{Ta có } \sin(2\pi - x) = -\sin x \neq y^{(4)}.$$

Câu 7.

$$\text{Ta có: } y = \sin 5x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 3x).$$

$$\text{Do đó } y' = \frac{1}{2}(7 \cos 7x + 3 \cos 3x) \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}(-49 \sin 7x - 9 \sin 3x).$$

Câu 8.

$$\text{Ta có: } y' = 2 \cos 2x \Rightarrow y'' = -4 \sin 2x.$$

$$\text{Xét đáp án A, } 4y - y'' = 4 \sin 2x + 4 \sin 2x.$$

$$\text{Xét đáp án B, } 4y + y'' = 4 \sin 2x - 4 \sin 2x = 0.$$

$$\text{Xét đáp án C, } y' \tan 2x = 2 \cos 2x \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2 \sin 2x \neq y.$$

$$\text{Xét đáp án D, } y^2 + (y')^2 = \sin^2 2x + 4 \cos^2 2x \neq 4.$$

Câu 9.

$$y = f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x} = 2x - 1 + \frac{1}{1-x} \Rightarrow y' = f'(x) = 2 + \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = f'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Câu 10.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 1 \Rightarrow y'' = 6x - 6 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 11.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 + 2 \sin 2x$, suy ra $f''(x) = 12x^2 + 4 \cos 2x \Rightarrow f'''(x) = 24x - 8 \sin 2x$.

Do đó: $f^{(4)}(x) = (f'''(x))' = 24 - 16 \cos 2x$.

Câu 12.

Ta có: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y'' = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Xét $y.y' = \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x$, do đó khẳng định (I) sai.

Xét $y^2.y'' = (x^2+1) \cdot \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \neq y'$, do đó khẳng định (II) sai.

Câu 13.

Ta có

$$y = \sqrt{1+3x-x^2} \Rightarrow y^2 = 1+3x-x^2 \Rightarrow 2y.y' = 3-2x \Rightarrow 2.(y')^2 + 2y.y'' = -2 \Rightarrow (y')^2 + y.y'' = -1.$$

Câu 14.

Ta có:

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-(\sqrt{2x-1})'}{2x-1} = \frac{-1}{(2x-1)\sqrt{2x-1}} = \frac{-1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$$

$$\Rightarrow f'''(x) = \frac{(\sqrt{(2x-1)^3})'}{(2x-1)^3} = \frac{3(2x-1)^2}{(2x-1)^3 \sqrt{(2x-1)^3}} = \frac{3}{\sqrt{(2x-1)^5}}.$$

Vậy $f'''(1) = 3$.

Câu 15.

Ta có: $f'(x) = -2 \sin 2x \Rightarrow f''(x) = -4 \cos 2x$.

Do đó: $f''(\pi) = -4$.

Câu 16.

Ta có: $f'(x) = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow f''(x) = -4 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f'''(x) = 8 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 16 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Xét phương trình

$$f^{(4)}(x) = -8 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}.$$

Mà $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên chỉ có giá trị $x = \frac{\pi}{2}$ thỏa mãn.

Câu 17.

Ta có $y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{x^3}.$

Xét đáp án A, $y''y^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^6} + 2 = 0$ (vô lí).

Xét đáp án B, $y''y + 2(y')^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \cdot \frac{1}{x} + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x^4} = 0$ (vô lí).

Xét đáp án C, $y''y^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^6} = 2$ (vô lí).

Xét đáp án D, $y''y = 2(y')^2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \cdot \frac{1}{x} = 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^4} = \frac{2}{x^4}$ (đúng).

Câu 18.

Ta có: $y = \sin^2 2x \Rightarrow y = \frac{1 - \cos 4x}{2} \Rightarrow y' = 2 \sin 4x \Rightarrow y'' = 8 \cos 4x \Rightarrow y^{(3)} = -32 \sin 4x.$

Khi đó $y^{(3)} + y'' + 16y' + 16y - 8 = -32 \sin 4x + 8 \cos 4x + 32 \sin 4x + 8(1 - \cos 4x) - 8 = 0.$

Câu 19.

Ta có $y' = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right); y'' = 2^2 \cos\left(2x + 2\frac{\pi}{2}\right); y''' = 2^3 \cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right).$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$

Câu 20.

Ta có $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}, y''' = \frac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}.$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{\sqrt{(2x+1)^{2n-1}}}$.

Câu 21.

Ta có: $y = \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x-1}$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)} = \frac{5 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Câu 22.

Ta có: $x = 3(x+2) - 2(x+3); x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.

Suy ra $y = \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2}$.

Mà $\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 1^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}, \left(\frac{1}{x+3}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+3)^{n+1}}$

nên ta có $y^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot n!}{(x+3)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$.

Câu 23.

Ta có $f'(x) = -\sin\left(x+a\right) = \cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right);$

$f''(x) = -\sin\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+a+\frac{2\pi}{2}\right);$

...

$f^{(2021)}(x) = \cos\left(x+a+\frac{2021\pi}{2}\right) = \cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right).$

Câu 24.

Ta có: $y' = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right), y'' = 2^2 \sin\left(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), y''' = 2^3 \sin\left(2x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \dots$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $y^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$

Câu 25.

Ta có $y = \sin 3x \cdot \cos x - \sin 2x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) - \sin 2x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x).$

Mặt khác theo quy nạp ta chứng minh được $(\sin ax)^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} - ax\right).$

Do đó $y^{(10)}(x) = \frac{1}{2}\left((-1)^9 4^{10} \cdot \sin(5\pi - 4x) - (-1)^9 \cdot 2^{10} \cdot \sin(5\pi - 2x)\right) = \frac{1}{2}\left(-4^{10} \cdot \sin 4x + 2^{10} \sin 2x\right)$

$$\Rightarrow y^{(10)}\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 454490,13$$

Câu 26.

Chứng minh bằng quy nạp $y^{(n)} = \frac{1}{2^n} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{n\pi}{2}\right)$. (1)

Với $n=1$ ta có $y' = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$.

Giả sử (1) đúng với $n=k, k \in \mathbb{N}^*$ tức là ta có $y^{(k)} = \frac{1}{2^k} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{2}\right)$.

Chứng minh (1) đúng với $n=k+1$ tức là cần chứng minh $y^{(k+1)} = \frac{1}{2^{k+1}} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$.

Thật vậy, ta có

$$\left[y^{(k)}\right]' = \left[\frac{1}{2^k} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{2}\right)\right]' = \frac{1}{2^{k+1}} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{k\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^{k+1}} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{(k+1)\pi}{2}\right).$$

Câu 27.

Giả sử $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{18}x^{18}$.

Khi đó $f^{(6)}(x) = 6!a_6 + b_7x + b_8x^2 + \dots + b_{18}x^{12} \Rightarrow f^{(6)}(0) = 720a_6$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (3x^2 - 2x - 1)^9 &= -(1 + 2x - 3x^2)^9 = -\sum_{k=0}^9 C_9^k (2x - 3x^2)^k \\ &= -\sum_{k=0}^9 C_9^k \sum_{i=0}^k C_k^i (2x)^{k-i} (-3x^2)^i = -\sum_{k=0}^9 \sum_{i=0}^k C_9^k C_k^i 2^{k-i} (-3)^i x^{k+i} \end{aligned}$$

Số hạng chứa x^6 ứng với k, i thỏa mãn $\begin{cases} 0 \leq i \leq k \leq 9 \\ k+i=6 \end{cases} \Rightarrow (k; i) \in \{(6; 0), (5; 1), (4; 2), (3; 3)\}$

$$\Rightarrow a_6 = -\left[C_9^6 C_6^0 2^6 (-3)^0 + C_9^5 C_5^1 2^4 (-3)^1 + C_9^4 C_4^2 2^2 (-3)^2 + C_9^3 C_3^3 2^0 (-3)^3\right] = -84$$

$$\Rightarrow f^{(6)}(0) = 720 \cdot (-84) = -60480.$$